Terceira avaliação - MAT01168 - MATEMÁTICA APLICADA II - Turma A

Nome: Cartão: Turma:

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente a sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas. Se precisar de folhas adicionais, solicite ao professor.
- É permitido o uso de calculadoras científicas sem recursos gráficos, de computação simbólica (ex. resolução de integrais) ou armazenamento de textos.

Formulário:

1. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
2. $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$
3. $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} a^{n-j} b^j$, $\binom{j}{n} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$

Questão 1(3.0) Considere a função $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-at}, & t > 0 \end{cases}$$

onde $a > 0$.

a) (1.0) Classifique esta função quanto à paridade, continuidade e causalidade. Esboce seu gráfico indicando eixos e valores notáveis.

b) (2.0) Encontre a transformada de Fourier $F(w)$ de $f(t)$ e escreva na forma trigonométrica. Esboce o gráfico do espectro de amplitudes.

Solução item a A função não apresenta paridade, é descontínua em $t = 0$ e causal pois $f(t) = 0$ quando $t < 0$.

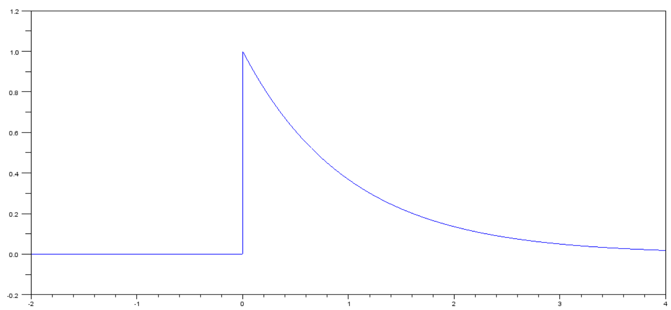


Figure 1: Gráfico para $a = 1$

Solução item b

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iwt}dt = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{iwt}dt \\ &= \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-at}\cos(wt)dt}_{tab(1)} - i\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-at}\sin(wt)dt}_{tab(2)} \\ &= \frac{a}{a^2+w^2} - i\frac{w}{a^2+w^2} = A(w) - iB(w) \end{aligned}$$

onde $A(w) = \dfrac{a}{a^2+w^2}$ e $B(W) = \dfrac{w}{a^2+w^2}$

$$|F(w)| = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2+w^2}\right)^2 + \left(\frac{w}{a^2+w^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+w^2}{(a^2+w^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+w^2}}$$

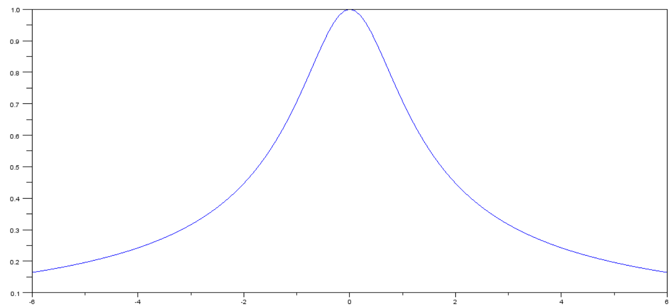
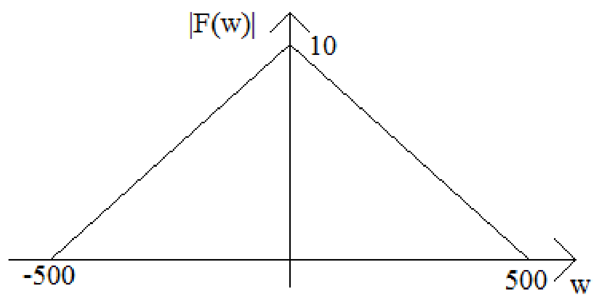


Figure 2: Gráfico de $|F(w)|$ para $a = 1$

Questão 2 (3.0) Considere o sinal $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$. O espectro de amplitudes de $F(w)$ é dado na figura abaixo.



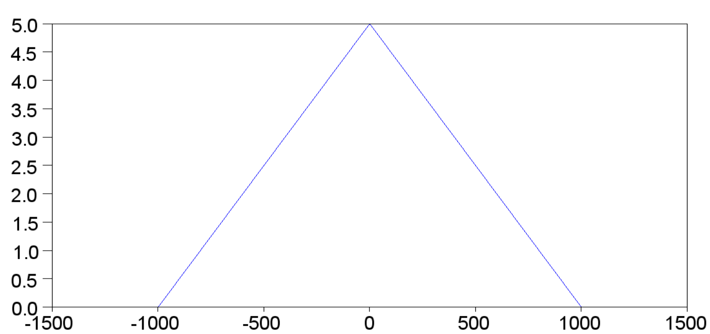
Aplicando as propriedades convenientes da Transformada de Fourier, faça o que se pede:

a) (1.0) Trace o diagrama de amplitudes do espectro de $g(t) = f(-2t)$.

b) (1.0) Trace o diagrama de amplitudes do espectro de $g(t) = f(t)\cos(2000t)$.

c) (1.0) Trace o diagrama de amplitudes do espectro de $g(t) = f'(t)$.

Solução item a Pela propriedade da mudança de escala, temos $G(w) = \dfrac{1}{2}F(-w/2)$, portanto pela propriedade da conjugação, temos $|G(w)| = \dfrac{1}{2}|F(w/2)|$.

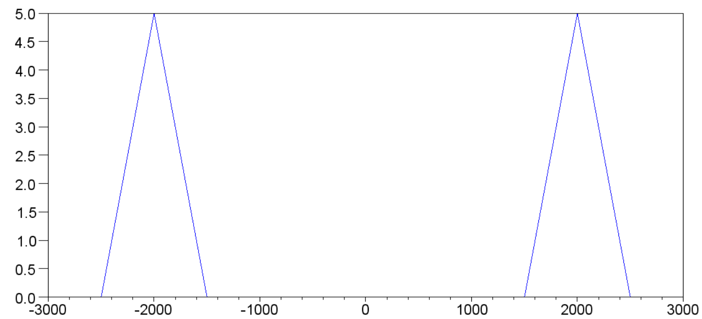


Solução item b Pela propriedade da modulação, temos:

$$G(w) = \frac{1}{2}\left[F(w - 2000) + F(w + 2000)\right]$$

Observa-se que, em geral, não é verdade que $|x + y| = |x| + |y|$. Porém neste caso, sempre que $F(w - 2000) \neq 0$, $F(w + 2000) = 0$, pelo que vale

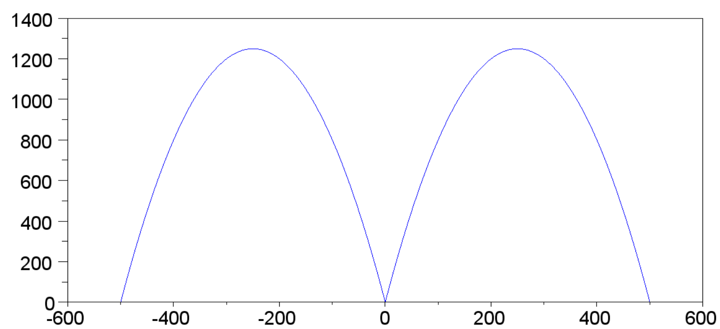
$$|G(w)| = \frac{1}{2}\left[|F(w - 2000)| + |F(w + 2000)|\right].$$



Solução item b Pela propriedade da derivada, temos:

$G(w) = iwF(w)$, o que implica $|G(w)| = |w||F(w)|$. Como $|F(w)| = 10\,(1 - |w|/500)$, temos:

$$|G(w)| = 10|w|\,(1 - |w|/500)\,.$$



Questão 3(2.0) Encontre uma representação em séries de Fourier para função onda quadrada dada por

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -T/2 < t \leq 0, \\ 1, & -0 < t \leq T/2 \end{cases}$$

onde $T > 0$ e $f(t+T) = f(t)$. **Obs:** Você deve simplificar a solução de forma a encontrar expressões algébricas simples para os coeficientes de Fourier de tal forma que não envolvam funções trigonométricas.

Solução Como $f(t)$ é uma função ímpar, $a_n = 0$ para todo n. Calculamos, então, os coeficientes b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(w_n t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(w_n t)dt \\ &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \sin(w_n t)dt = \frac{4}{T}\left.\frac{-\cos(w_n t)}{w_n}\right|_0^{T/2} \\ &= \frac{4}{T}\frac{1-\cos(w_n T/2)}{w_n} \end{aligned}$$

Como $w_n = \dfrac{2\pi n}{T}$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(1-\cos(\pi n)) = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

Portanto

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin w_n t}{1} + \frac{\sin 3w_n t}{3} + \frac{\sin 5w_n t}{5} + \ldots\right]$$

Questão 4(2.0)Usando a Transformada de Fourier encontre a solução da equação do calor dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \delta(x) \end{cases}$$

Solução Definimos $U(k,t) = \mathcal{F}_x\{u(x,t)\}$ e temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial U(k,t)}{\partial t} \\ \mathcal{F}_x\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\} &= (ik)^2 U(k,t) = -k^2 U(k,t) \\ U(k,0) = \mathcal{F}_x\{u(x,0)\} &= \mathcal{F}_x\{\delta(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = 1 \end{aligned}$$

Assim obtemos a seguinte equação para $U(k,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(k,t)}{\partial t} = -k^2 U(k,t) \\ U(k,0) = 1 \end{cases}$$

Esta equação é uma EDO para cada k fixo e sua solução é dada por:

$$U(k,t) = U(k,0)e^{-k^2 t} = e^{-k^2 t}$$

Finalmente calculamos a solução $u(x,t)$ para Transformada Inversa de Fourier:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}_k^{-1}\{U(k,t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t}\left(\cos(kx) + i\sin(kx)\right) dk \stackrel{paridade}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-k^2 t}\cos(kx) dk \end{aligned}$$

Usamos TAB 8 com $a^2 = t$ e $m = x$ para obter:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$