Terceira avaliação - MAT01168 - MATEMÁTICA APLICADA II - Turma C

Nome: Cartão: Turma:

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente a sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas. Se precisar de folhas adicionais, solicite ao professor.
- É permitido o uso de calculadoras científicas sem recursos gráficos, de computação simbólica (ex. resolução de integrais) ou armazenamento de textos.

Formulário:

1. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
2. $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$
3. $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} a^{n-j} b^j$, $\binom{j}{n} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$
4. $\int u \cos u du = \cos(u) + u\sin(u) + C$
5. $\int u \sin u du = \sin(u) - u\cos(u) + C$

Questão 1(3.0) Considere a função $f(t)$ dada por

$$f(t) = \frac{a^2}{a^2+t^2}$$

onde $a > 0$.

a) (1.0) Classifique esta função quanto à paridade, continuidade e causalidade. Esboce seu gráfico indicando eixos e valores notáveis.

b) (2.0) Encontre a transformada de Fourier $F(w)$ de $f(t)$ e escreva na forma trigonométrica. Esboce o diagrama de amplitudes do espectro.

Solução item a A função é par pois $f(-t) = \dfrac{a^2}{a^2+(-t)^2} = \dfrac{a^2}{a^2+t^2} = f(t)$; é contínua pois é uma função racional cujo denominador é diferente de zero para todo t e não é causal pois $f(t) \neq 0$ para $t < 0$.

Solução item b

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{a^2+t^2} e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{a^2+t^2} \cos(wt) dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{a^2+t^2} \sin(wt) dt \\ &\overset{paridade}{=} = 2a^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2+t^2} \cos(wt) dt \overset{Tab(3)}{=} 2a^2 \frac{\pi}{2a} e^{-aw}, w \geq 0 \end{aligned}$$

A tabela só fornece o valor da integral para $w \geq 0$, o valor para $w < 0$ pode ser obtida da paridade para em w de

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2+t^2} \cos(wt) dt$$

Portanto:

$$F(w) = a\pi e^{-a|w|}$$

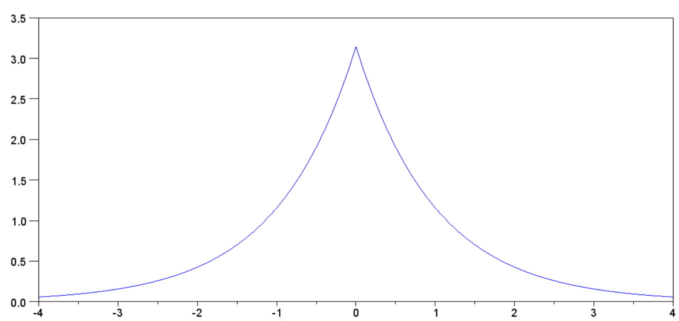

Figure 1: Espectro de amplitudes de $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

Questão 2(3.0) Sabendo que a transformada de Fourier de $f(t) = e^{-t^2}$ é dada por $F(w) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}$, use as convenientes propriedades da Transformada de Fourier para responder o que se pede:

a) (1.0) Qual a transformada de Fourier de $g(t) = e^{-a^2t^2}$ onde a é uma constante positiva?

b) (1.0) Sendo $h(t) = \cos(20t)f(t)$, encontre a transformada da Fourier de $h(t)$ e esboce o diagrama de amplitudes.

c) (1.0) Sendo $i(t) = \cos(20t)^2 f(t)$, encontre a transformada da Fourier de $i(t)$ e esboce o diagrama de amplitudes.

Solução item a Como $g(t) = f(at)$, aplicamos a propriedade da mudanção de escala para obter:

$$G(w) = \frac{1}{|a|}F(w/a) = \frac{1}{a}\sqrt{\pi}e^{-\frac{(w/a)^2}{4}} = \frac{1}{a}\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4a^2}}$$

Solução item b Usamos a propriedade da modulação:

$$H(w) = \frac{F(w+20) + F(w-20)}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(e^{-\frac{(w-20)^2}{4}} + e^{-\frac{(w+20)^2}{4}}\right)$$

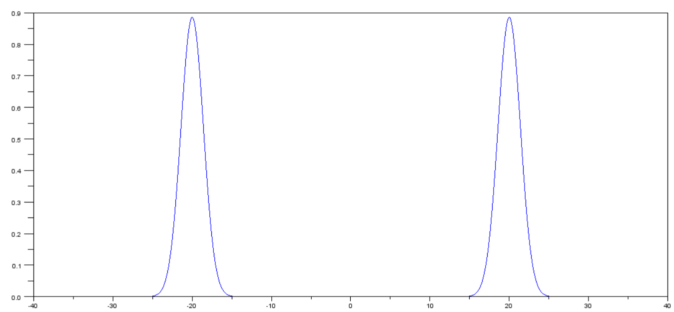

Figure 2: Espectro de amplitudes de $f(t) = \cos(20t)e^{-t^2}$

Solução item c Usamos a identidade $\cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$ e temos

$$h(t) = \frac{1}{2}[1 + \cos(40t)]\, f(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}\cos(40t)f(t).$$

Aplicamos a propriedade da modulão e a linearidade para obter:

$$H(w) = \frac{1}{2}F(w) + \frac{F(w-40) + F(w+40)}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(2e^{-\frac{w^2}{4}} + e^{-\frac{(w-40)^2}{4}} + e^{-\frac{(w+40)^2}{4}}\right)$$

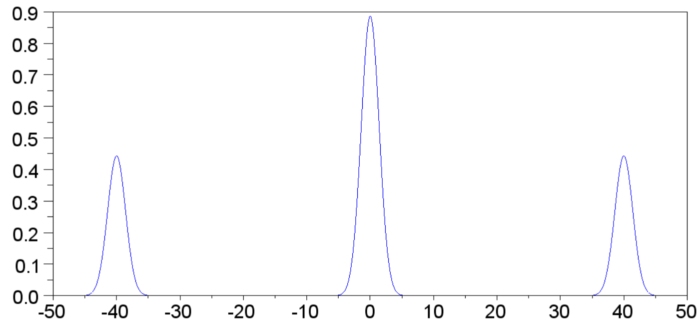

Figure 3: Espectro de amplitudes de $f(t) = \cos^2(20t)e^{-t^2}$

Questão 3(2.0) Encontre uma representação em séries de Fourier para o trem de impulsos dado por

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Solução Primeiro observamos que $\delta_T(t) = \delta(t)$ para $-T/2 \leq tleqT/2$. Portanto

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t)e^{-iw_nt}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-iw_nt}dt \\ &\overset{filtragem}{=} \frac{1}{T}e^{iw_n0} = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

onde $w_n = \dfrac{2\pi n}{T}$

Assim

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iw_nt}.$$

Questão 4(2.0)Usando a Transformada de Fourier encontre a solução da equação do calor dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \cos(k_0 x) \end{cases}$$

Dica: Você pode usar sem demonstrar que $\mathcal{F}_x\left\{e^{iax}\right\} = 2\pi\delta(k-a)$.

Solução Definimos $U(k,t) = \mathcal{F}_x\{u(x,t)\}$ e temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial U(k,t)}{\partial t} \\ \mathcal{F}_x\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\} &= (ik)^2 U(k,t) = -k^2 U(k,t) \\ U(k,0) = \mathcal{F}_x\{u(x,0)\} &= \mathcal{F}_x\{\cos(k_0 x)\} = \mathcal{F}_x\left\{\frac{e^{ik_0x} + e^{-ik_0x}}{2}\right\} = \pi\left[\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)\right] \end{aligned}$$

Assim obtemos a seguinte equação para $U(k,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(k,t)}{\partial t} = -k^2 U(k,t) \\ U(k,0) = \dfrac{\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)}{2} \end{cases}$$

Esta equação é uma EDO para cada k fixo e sua solução é dada por:

$$U(k,t) = U(k,0)e^{-k^2 t} = \pi\left[\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)\right]e^{-k^2 t}$$

Finalmente calculamos a solução $u(x,t)$ para Transformada Inversa de Fourier:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}_k^{-1}\{U(k,t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi\left[\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)\right]e^{-k^2 t}e^{ikx}dk \\ &\overset{Filtragem}{=} \frac{1}{2}\left[e^{-k_0^2 t}e^{ik_0x} + e^{-k_0^2 t}e^{-ik_0x}\right] = e^{-k_0^2 t}\frac{e^{ik_0x} + e^{-ik_0x}}{2} = e^{-k_0^2 t}\cos(k_0 x) \end{aligned}$$