UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma B - 2012/1
Terceira avaliação - Grupo 1

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.

Formulário:

1. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)$
2. $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$
3. $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} a^{n-j}b^j$, $\binom{j}{n} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$
4. $\int u\cos u du = \cos(u) + u\operatorname{sen}(u) + C$
5. $\int u\operatorname{sen} u du = \operatorname{sen}(u) - u\cos(u) + C$
6. $\int ue^u du = e^u(u-1) + C$

Questão 1(2.5) Verifique quais das afirmações abaixo são verdadeiras justificando cuidadosamente usando a teoria dada em aula.

a) (1.0) Se $f(t) = e^{-ax^2}$ e $g(t) = e^{-bx^2}$ onde a e b são constantes positivas então $h(t) = f(x) * g(x)$ é da forma Ne^{-cx^2} onde N e c são constantes positivas.

b) (0.75) Se $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos^2\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ então $f(t)$ é uma função periódica e sua frequência (angular) fundamental é $w_F = \dfrac{2\pi}{T}$.

c) (0.75) Quando reduzimos a velocidade de reprodução de uma gravação de áudio, temos a sensação de que o som se tornou mais grave.

Solução a Primeiro usamos a propriedade da convolução:

$$f(t) * g(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{F(k)G(k)\right\}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\cos(kx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{k^2}{4a}} \\
G(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ikx}dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-bx^2}\cos(kx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}}e^{-\frac{k^2}{4b}} \\
F(k)G(k) &= \frac{\pi}{\sqrt{ab}}e^{-\frac{a+b}{4ab}k^2} \\
f(t) * g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)G(k)e^{ikx}dk = \frac{1}{\sqrt{ab}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{a+b}{4ab}k^2}\cos(kx)dx \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a+b}}e^{-\frac{ab}{a+b}x^2}
\end{aligned}$$

Solução b Como $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, a frequencia fundamental é $\dfrac{4\pi}{T}$. Para verificar que função é periódica, basta observar que $T/2$ é um período de cada função envolvida no somatório.

Solução c Pela propriedade da mudança de escala, uma dilatação no domínio tempo acarreta em uma contração no domínio frequência, ou seja, a energia do sinal se concentra em frequências mais baixas.

• **Questão 2** (2.5 pontos): Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t), & \operatorname{sen}(t) \geq 0 \\ 0, & \operatorname{sen}(t) < 0 \end{cases}$$

Sabendo que

$$f(t) = E + F \operatorname{sen} t - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4t}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6t}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{\cos(2nt)}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots\right)$$

a) (1.0) Obtenha os valores das constantes E e F.

b) (1.5) Esboce os gráficos dos espectro de amplitude e fase contemplando pelo menos 3 raias espectrais à esquerda de $w = 0$ e três raias espectrais à direita de $w = 0$.

Solução a Observando que o período é $T = 2\pi$, temos:

$$E = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos(t)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

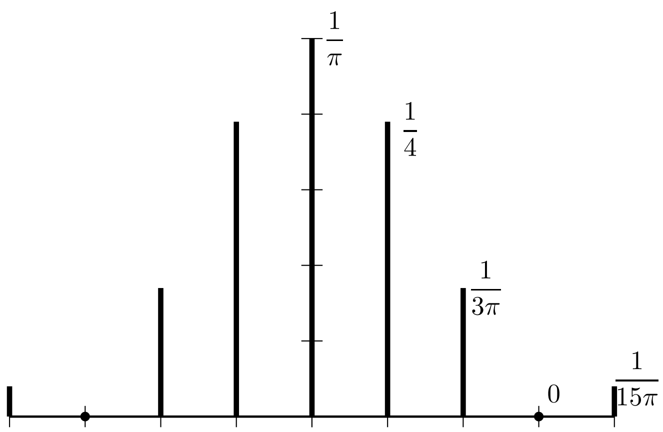
$$\begin{aligned} F &= b_1 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen}(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

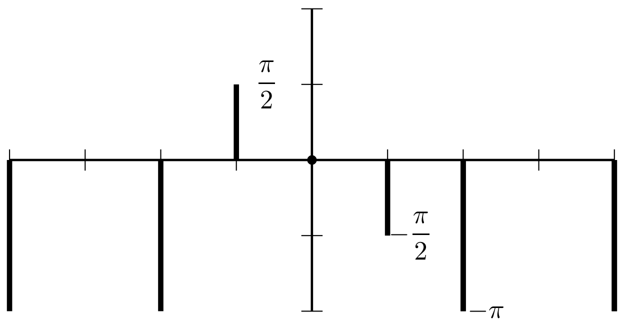
onde usamos

$$\operatorname{sen}^2(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2it} - 2 + e^{-2it}}{-4} = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

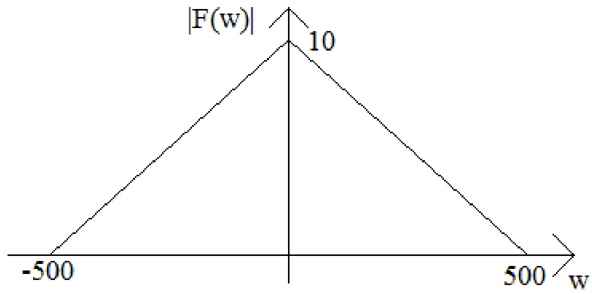
Solução b

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \\ C_{\pm 1} &= \frac{a_1 \mp b_1 i}{2} = \mp\frac{i}{4} \\ C_{\pm 2} &= \frac{a_2 \mp b_2 i}{2} = \frac{1}{3\pi} \\ C_{\pm 3} &= \frac{a_3 \mp b_3 i}{2} = 0 \\ C_{\pm 4} &= \frac{a_4 \mp b_4 i}{2} = \frac{1}{15\pi} \end{aligned}$$





• **Questão 3** (2.5 pontos): Considere o sinal $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$. O espectro de amplitudes de $F(w)$ é dado na figura abaixo.



a) (1.0) Esboce o diagrama de amplitudes de $f'(t)\cos(5000t)$

b) (1.5) Sabendo que $F(w)$ é um número real não-negativo, encontre $f(t)$.

Solução item a Primeira observamos que se $g(t) = f'(t)$, então pela propriedade da derivada, temos:

$$G(w) = \mathcal{F}\left\{f'(t)\right\} = iwF(w)$$

portanto

$$|G(w)| = |w||F(w)|$$

Usando a propriedade da modulação, temos:

$$\mathcal{F}\left\{f'(t)\cos(5000t)\right\} = \frac{1}{2}\left[G(w-5000) + G(w+5000)\right]$$

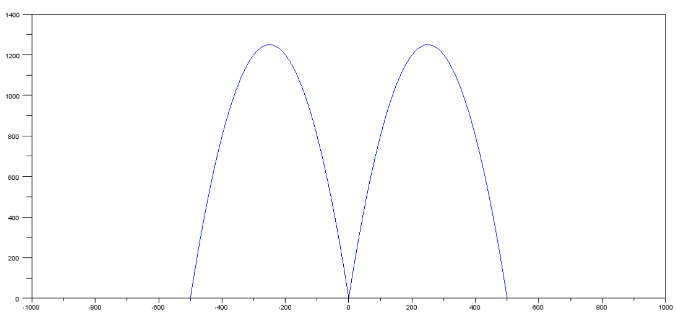


Figura 1: Diagrama de amplitudes de $|G(w)|$

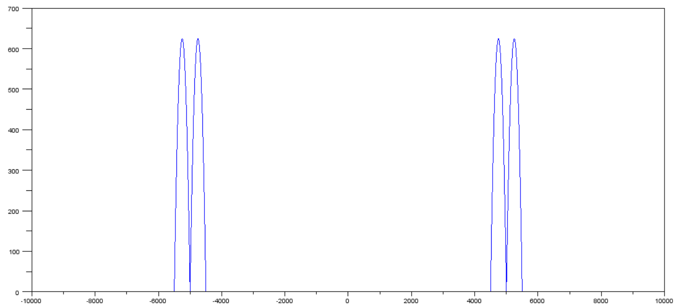


Figura 2: Diagrama de amplitudes de $\mathcal{F}\{f'(t)\cos(5000t)\}$.

Solução item b

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw = \frac{1}{\pi}\int_0^{500} 10\,(1 - w/500)\cos(wt)dw \\
&= \frac{10}{\pi}\left[\int_0^{500}\cos(wt)dw - \frac{1}{500}\int_0^{500} w\cos(wt)dw\right] \\
&= \frac{10}{\pi}\left[\left.\frac{\operatorname{sen}(wt)}{t}\right|_0^{500} - \frac{1}{500t^2}\int_0^{500} tw\cos(wt)d(wt)\right] \\
&= \frac{10}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(500t)}{t} - \frac{1}{50\pi t^2}\left[\cos(wt) + wt\operatorname{sen}(wt)\right]_0^{500} \\
&= \frac{10}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(500t)}{t} - \frac{1}{50\pi t^2}\left[\cos(wt) + wt\operatorname{sen}(wt)\right]_0^{500} \\
&= \frac{1}{50\pi t^2}\left[1 - \cos(500t)\right]
\end{aligned}
$$

• **Questão 4** (2.5 pontos): Um fluido se desloca em um tubo termicamente isolado com velocidade constante v de forma que a evolução da temperatura $u(x,t)$ como uma função da coordenada x e do tempo é descrita pelo seguinte modelo simplificado:

$$u_t - vu_x - u_{xx} = 0.$$

Sabendo que no instante $t = 0$, a temperatura foi bruscamente aquecida em uma região muito pequena, de forma que podemos considerar

$$u(x,0) = 500\delta(x).$$

Use a técnica das transformadas de Fourier para obter a solução desta equação diferencial quando $v = 1m/s$ e esboce o gráfico da solução quando $t = 0$ e $t = 1s$.

Aplicamos a transforma de Fourier na variável x, obtemos a seguinte expressão para a equação transformada

$$U_t(k,t) - v(ik)U(k,t) - (ik)^2U(k,t) = 0$$

onde foi usada a propriedade da derivada. A condição inicial se torna:

$$U(k,0) = 500\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-ikx} = 500$$

Portanto temos o seguinte problema de valor inicial:

$$U_t(k,t) = (-k^2 + ivk)U(k,t)$$

$$U(k,0) = 500$$

cuja solução é

$$U(k,t) = 500e^{(-k^2+ivk)t} = 500e^{ivkt}e^{-k^2t}$$

A multiplicação por e^{ivtk} indica um deslocamento no eixo x. Logo precisamos calcular:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x^{-1}\left\{e^{-k^2t}\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k^2t}e^{ikx}dk = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-k^2t}\cos(ikx)dk \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\end{aligned}$$

Portanto

$$u(x,t) = \frac{250}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x+vt)^2}{4t}} = \frac{250}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x+t)^2}{4t}}$$

Para o gráfico temos:

$$u(x,0) = 500\delta(x)$$

$$u(x,1) = \frac{250}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{4}}$$