UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2012/2
Terceira avaliação

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Deixe claro o uso de ítens tabelados.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.

Formulário:

1. $\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
2. $\int x^2 e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\right) + C$
3. $\int x^n e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x + C$
4. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$
5. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$

Nota \ Oitava	1	2	3	4	5	6	7
Dó	32,7	65,4	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó#	34,6	69,3	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	36,7	73,4	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré#	38,9	77,8	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	41,2	82,4	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	43,7	87,3	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá#	46,2	92,5	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	49,0	98,0	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol#	51,9	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	55	110	220	440	880	1760	3520
Lá#	58,3	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	61,7	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

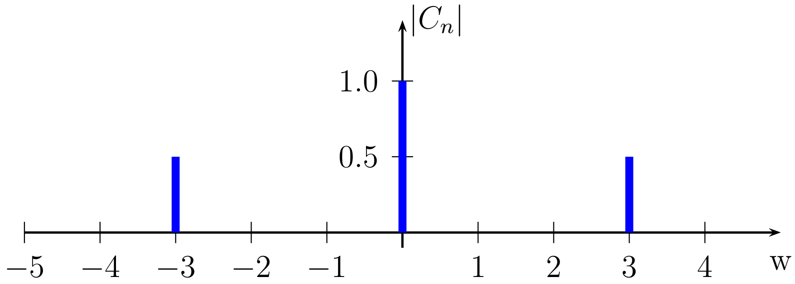
• **Questão 1** (2.0) Esboce o diagrama de amplitudes do espectro dos seguintes sinais, explicando se o espectro é discreto ou contínuo. Indique nos gráficos, eixos e valores notáveis.

a) (0.5) $f(t) = \text{sen}(3t) + 1$

b) (0.5) $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(nt)$

c) (1.0) $h(t) = \frac{2}{t^2+1}$

Resposta item a) Esta é uma função periódica com espectro discreto. $f(t) = \text{sen}(3t) + 1 = \left(\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i}\right) + 1 = \frac{i}{2}e^{-3it} + 1 - \frac{i}{2}e^{3it}$



Resposta item b) Esta é uma função periódica com espectro discreto. Pode-se proceder conforme no item a, substituindo $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ou identificar a série na forma trigonométrica:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(nt) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(nt)$$

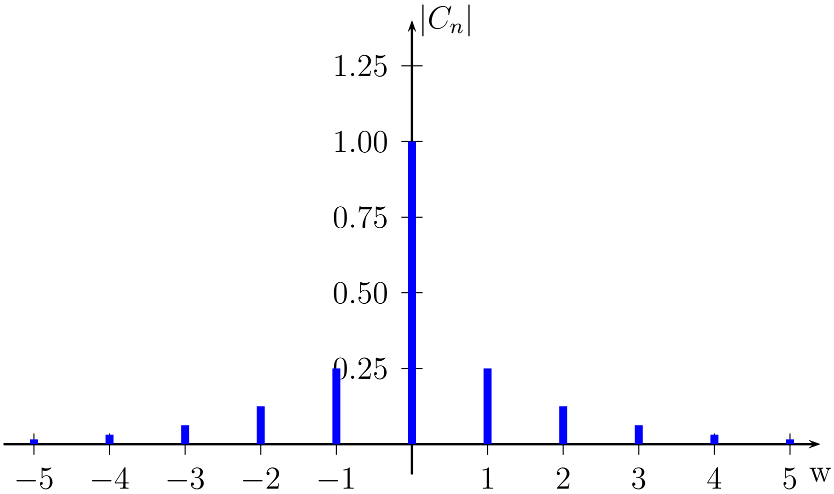
ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= 1 \\ a_n &= 2^{-n}, n \geq 1 \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{a_0}{2} = 1 \\ C_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} = 2^{-(|n|+1)} \end{aligned}$$

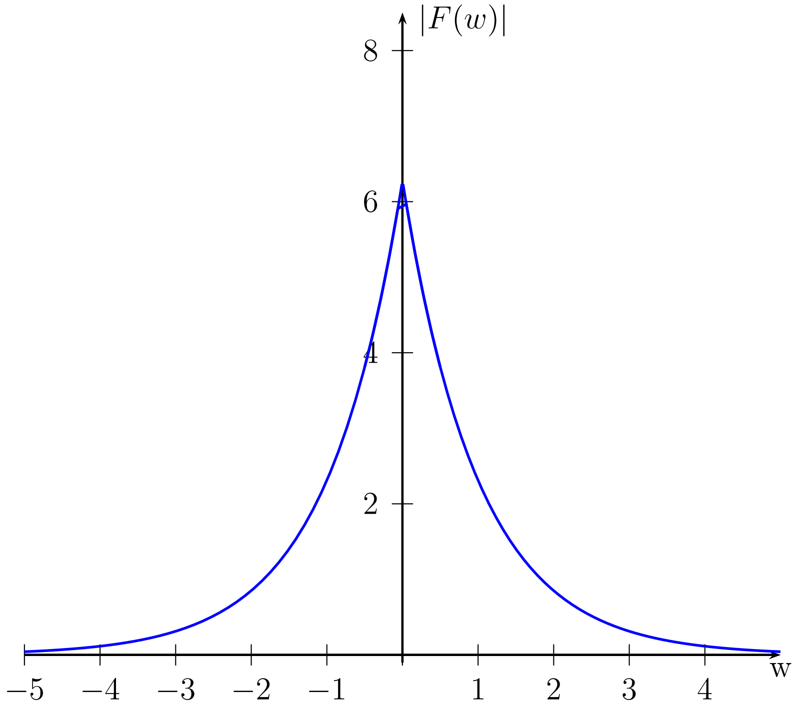
Onde se usou que $a_{-n} = a_n$



Resposta item c) Esta é uma função não-periódica com espectro contínuo, portanto, calculamos sua Transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} H(w) &= \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{2}{t^2+1}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{t^2+1}e^{iwt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{2}{t^2+1}}_{\text{par}}\Bigg[\underbrace{\cos(wt)}_{\text{par}} - i\underbrace{\text{sen}(wt)}_{\text{ímpar}}\Bigg]dt \\ &= 4\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+1}\cos(wt)dt = 2\pi e^{-|w|} \end{aligned}$$

A última igualmente provém do ítem 4 da tabela com $m = w$ para $w \geq 0$ e $m = -w$ para $w < 0$.



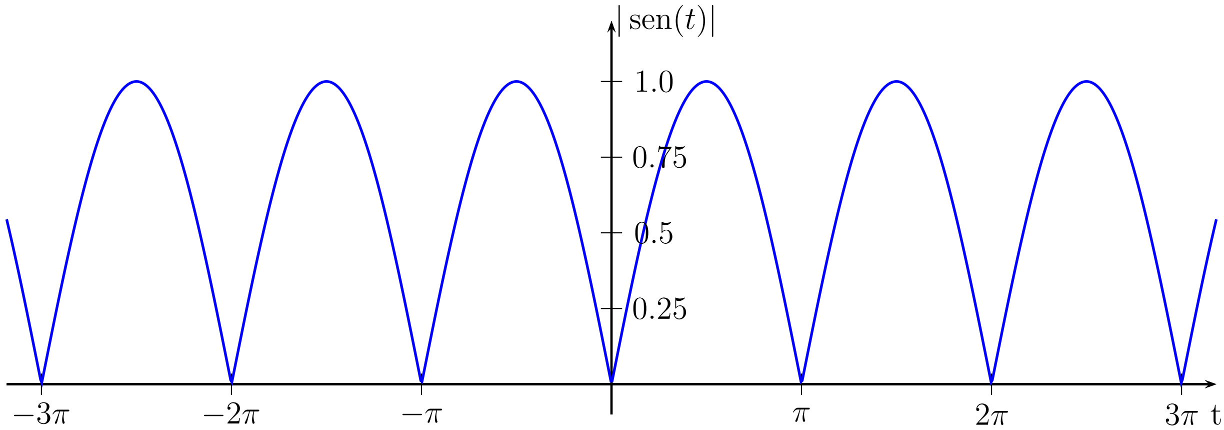
• **Questão 2** (3.0) Encontre a forma trigonométrica da Série de Fourier da função

$$f(t) = |\operatorname{sen}(t)|$$

e, depois, calcule a Transformada de Fourier do pacote de onda dado por

$$g(t) = |\operatorname{sen}(t)|e^{-t^2/4}.$$

Solução primeira parte



É fácil ver que a função $f(t)$ é periódica com período π e, portanto, a forma trigonométrica da série de Fourier associada é dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(2nt) + b_n \operatorname{sen}(2nt)\right]$$

Como $f(t)$ é uma função ímpar, $b_n = 0$ para todo n. Calculemos os coeficientes a_n:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}(t)|dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t)dt = \frac{2}{\pi}\left(-\cos(t)\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}(t)|\cos(2nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t)\cos(2nt)dt$$

Para resolver esta integral, usamos a mesma técnica usada para obter as relações de ortogonalidade das funções trigonométrica (ver lista zero). Basta usar a identidade trigonométrica dada no ítem 5 do formulário:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\end{aligned}$$

somanda as expressões, temos:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t(1+2n)) + \operatorname{sen}(t(1-2n))dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(t(1+2n))}{(1+2n)} - \frac{\cos(t(1-2n))}{(1-2n)}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{(1+2n)} + \frac{1}{(1-2n)}\right] = \frac{4}{\pi(1+2n)(1-2n)} = \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \end{aligned}$$

Onde se usou que o cosseno de um múltiplo ímpar de π é 0.

Portanto $f(t)$ pode ser escrito como:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nt)\right]$$

Solução segunda parte Por linearidade, temos:

$$\begin{aligned} G(w) &= \mathcal{F}\left\{g(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{2e^{-t^2/4}}{\pi}\left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nt)\right]\right\} \\ &= \frac{2}{\pi}\mathcal{F}\left\{e^{-t^2/4}\right\} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\mathcal{F}\left\{e^{-t^2/4}\cos(2nt)\right\} \end{aligned}$$

Agora calculamos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{e^{-t^2/4}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/4}e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-t^2/4}}_{\text{par}}\left[\underbrace{\cos(wt)}_{\text{par}} - i\underbrace{\text{sen}(wt)}_{\text{ímpar}}\right]dt \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/4}\cos(wt)dt = 2\sqrt{\pi}e^{-w^2} \end{aligned}$$

onde se usou o item 8 da tabela de integrais definidas com $a = 1/2$ e $m = w$. Agora usamos o teorema da modulação para obter $\mathcal{F}\left\{e^{-t^2/4}\cos(2nt)\right\}$:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-t^2/4}\cos(2nt)\right\} = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{\pi}e^{-(w-2n)^2} + 2\sqrt{\pi}e^{-(w+2n)^2}\right] = \sqrt{\pi}\left[e^{-(w-2n)^2} + e^{-(w+2n)^2}\right]$$

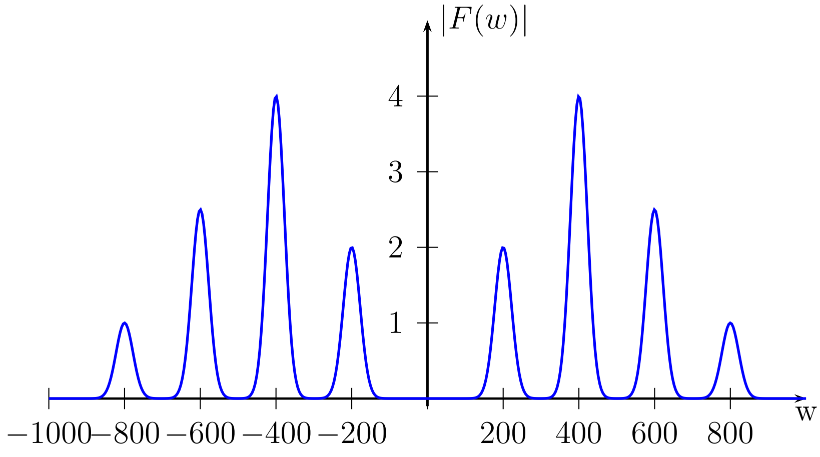
Portanto:

$$G(w) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-w^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\left[e^{-(w-2n)^2} + e^{-(w+2n)^2}\right]$$

Os amantes da simplicidade apreciarão a beleza da seguinte formulação:

$$G(w) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}e^{-(w-2n)^2}$$

• **Questão 3** (2.5) O diagrama de amplitudes do espectro do registro do som de um instrumento musical é dado abaixo:



a) (0.5) Obtenha o valor de $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$.
b) (1.0) Esboce o diagrama de amplitudes do espectro de $-4f(2t)$.
c) (1.0) Esboce o diagrama de amplitudes do espectro de $f'(t)$.

Solução do item a

Deve-se observar que

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iwt}dt\bigg|_{w=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{0}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

Do diagrama, temos que $|F(0)| = 0$ e, consequentemente, $F(0) = 0$ e, portanto:

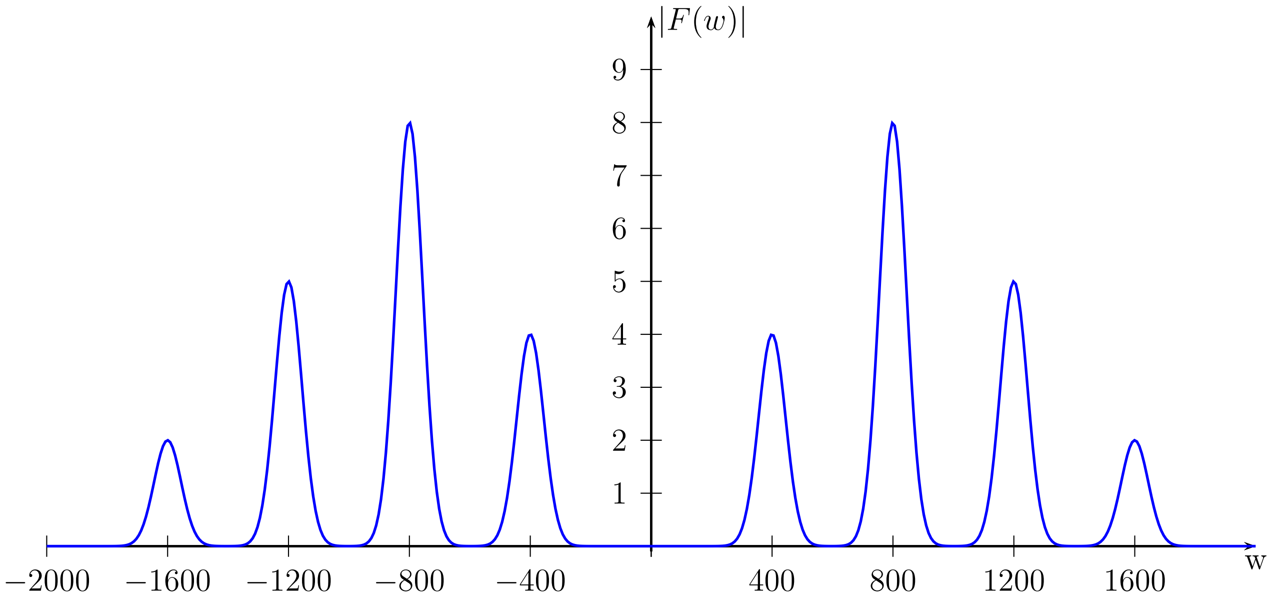
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0.$$

Solução do item b

$$\mathcal{F}\left\{-4f(2t)\right\} = -4\mathcal{F}\left\{f(2t)\right\} = -4\frac{1}{2}F(w/2)$$

onde se usou a propriedade da linearidade e a propriedada da mudança de escala. E temos:

$$\left|\mathcal{F}\left\{-4f(2t)\right\}\right| = 2\left|F(w/2)\right|$$

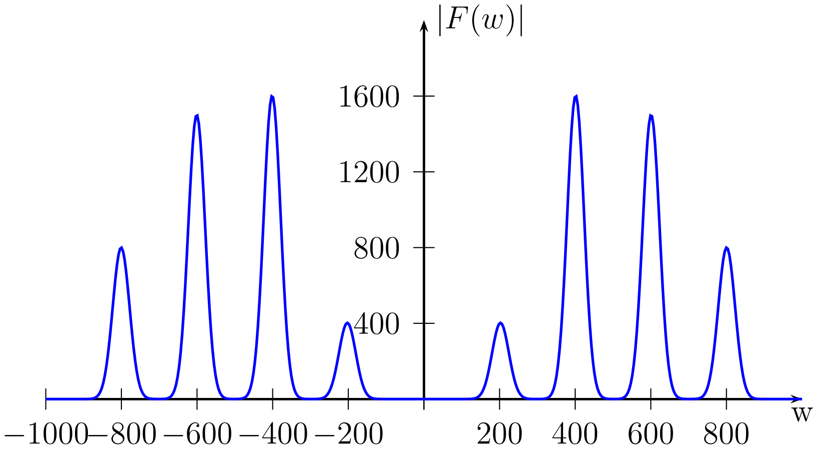


Solução do item c
Usamos a propriedade da derivada:

$$\mathcal{F}\left\{f'(t)\right\} = iwF(w)$$

Portanto:

$$\left|\mathcal{F}\left\{f'(t)\right\}\right| = |w| \cdot |F(w)|$$



• **Questão 4** (2.5) Resolva a seguinte equação diferencial parcial usando a técnica das Transformadas de Fourier:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \alpha u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \delta(x - x_0), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Solução

Defina

$$U(k,t) = \mathcal{F}_x\left\{u(x,t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-xt}dt$$

Temos que a função $U(k,t)$ satisfaz a equação:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(k,t) + \alpha U(k,t) = (ik)^2 U(k,t)$$

ou, equivalentemente:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(k,t) + (\alpha + k^2)U(k,t) = 0$$

com a condição inicial dada por:

$$U(k,0) = \mathcal{F}_x\left\{u(x,0)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-xt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)e^{-xt}dt = e^{-ikx_0}$$

Portanto, $U(k,t)$ satifaz uma EDO tipo $y' = ay$ cuja solução é $y(t) = y(0)e^{at}$:

$$U(k,t) = e^{-ikt}e^{-(\alpha+k^2)t} = e^{-\alpha t}e^{-ikt}e^{-k^2 t}$$

Para obter a solução da EDP, bata calcular a transformada inversa:

$$u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}\left\{U(k,t)\right\} = \mathcal{F}_x^{-1}\left\{e^{-\alpha t}e^{-ikt}e^{-k^2 t}\right\} = e^{-\alpha t}\mathcal{F}_x^{-1}\left\{e^{-ikt}e^{-k^2 t}\right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x^{-1}\left\{e^{-k^2 t}\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t}e^{ikx}dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-k^2 t}}_{\text{par}}\left[\underbrace{\cos(kx)}_{\text{par}} + i\underbrace{\operatorname{sen}(kx)}_{\text{ímpar}}\right]dk \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-k^2 t}\cos(kx)dk = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

E, finalmente, usando a propriedade do deslocamento, temos a solução:

$$u(x,t) = \frac{e^{-\alpha t}}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}}$$