UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2017/1
Prova da área IIB

1 - 5	6	7	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente!

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} = \frac{1}{2}F(w - w_0) + \frac{1}{2}F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right), \quad a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(w_nt) + b_n\operatorname{sen}(w_nt)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt,$ $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_nt)dt,$ $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(w_nt)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_ne^{iw_nt},$ onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(w)\cos(wt) + B(w)\operatorname{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw,$ onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma} \qquad (a\geq 0,\ m>0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\int_0^\infty xe^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$
11. $\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\mathrm{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(ax)\,\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	22. $\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$
$\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
$\mathrm{sen}(x)\cos(y) = \frac{\mathrm{sen}(x+y)+\mathrm{sen}(x-y)}{2}$

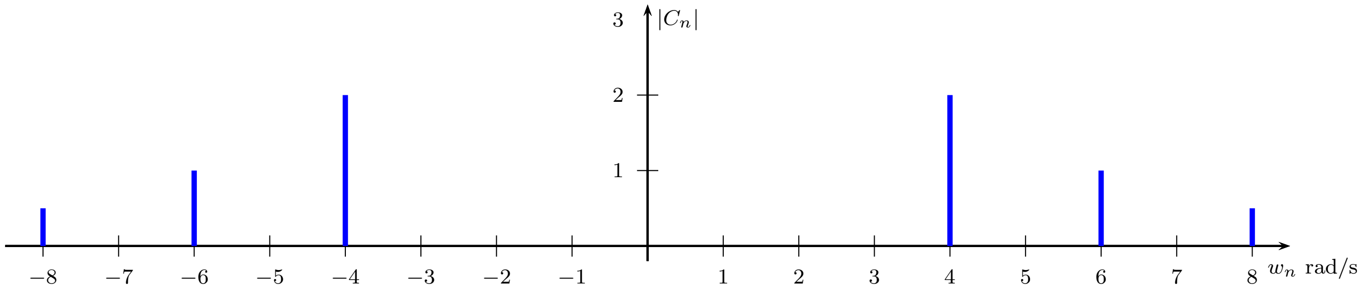
Frequências das notas musicais em Hertz:

Nota \ Escala	1	2	3	4	5	6
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\ dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\int x^2e^{\lambda x}\ dx = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\int x^ne^{\lambda x}\ dx = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}dx+C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\int x\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Dado o diagrama de espectro de módulo abaixo, marque as alternativas que representam, respectivamente, a frequência fundamental e o valor médio da função.



Frequência Fundamental
( ) 1 rad/s
( ) 2 rad/s
( ) 3 rad/s
( ) 4 rad/s
( ) 6 rad/s
( ) 8 rad/s

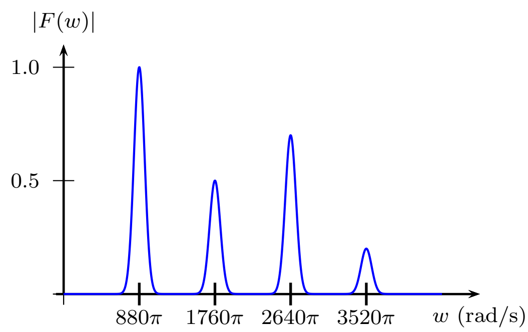
Valor Médio
( ) -2
( ) -1
( ) 0
( ) 1
( ) 2
( ) 3

• **Questão 2** (1.0 ponto) Marque as alternativas que indicam as transformadas inversas de Fourier das funções $F(w) = 2\pi\delta(w)$ e $G(w) = \pi\delta(w - w_0) + \pi\delta(w + w_0)$, respectivamente.

$\mathcal{F}^{-1}\{F(w)\}$
( ) 1
( ) $\cos(t)$
( ) $\text{sen}(t)$
( ) $e^{-|t|}$
( ) 2π
( ) e^{-it}

$\mathcal{F}^{-1}\{G(w)\}$
( ) $\cos(w_0 t)$
( ) $\cos(t)\cos(w_0 t)$
( ) $\text{sen}(w_0 t)$
( ) $e^{-|w_0 t|}$
( ) $2\pi\cos(w_0 t)$
( ) $e^{-iw_0 t}$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere uma aproximação do diagrama de espectro de magnitudes da nota Lá da escala 3 tocada por um instrumento musical e representado por uma função $f(t)$:

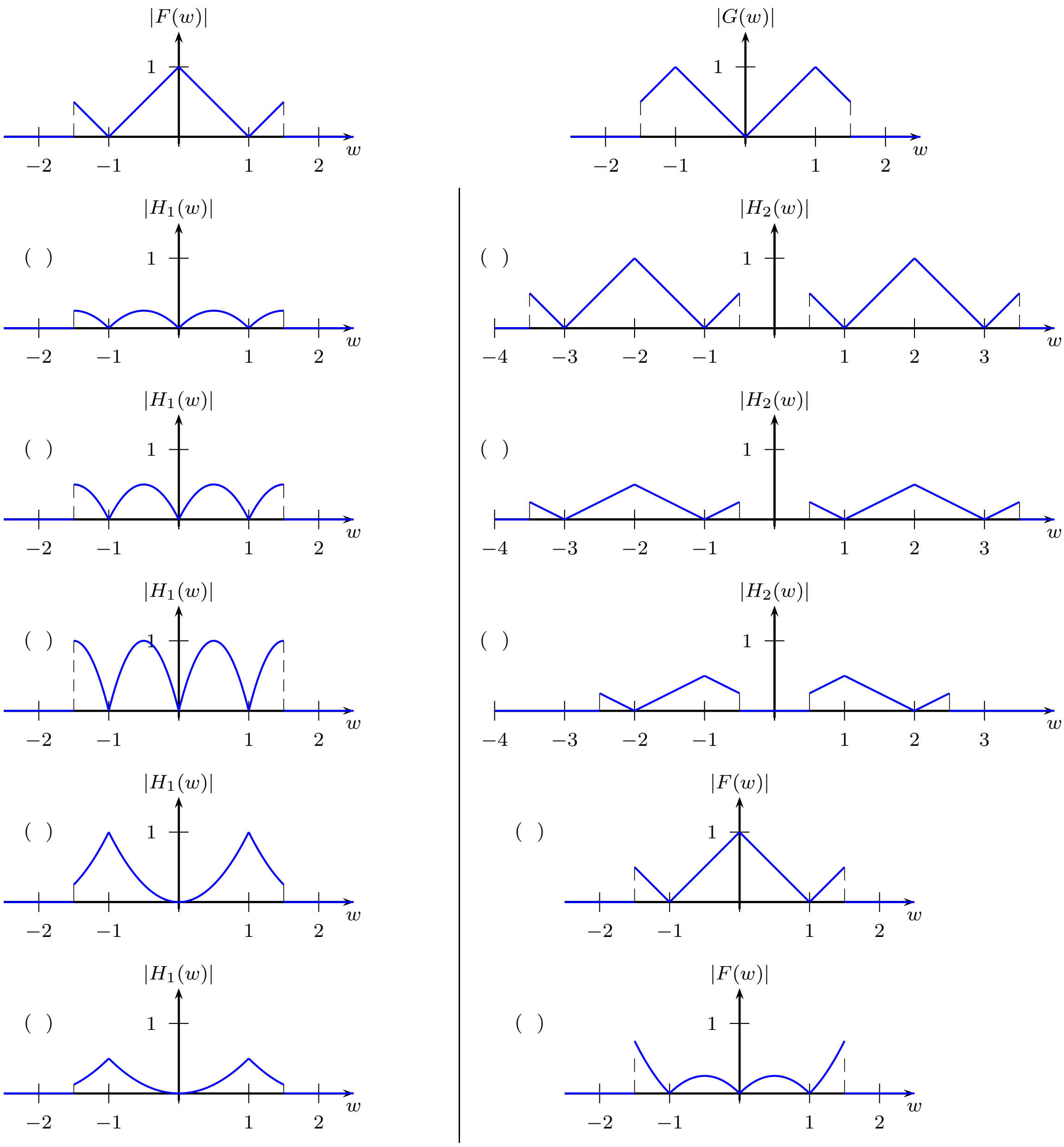


Marque na primeira coluna a nota musical correspondente a desacelerar para 0,84 a velocidade do sinal ($f(0,84t)$) e, na segunda, a nota musical correspondente a modular o sinal na frequência 4400π rad/s ($f(t)\cos(4400\pi t)$)

Nota correspondente ao sinal $f(0.84t)$
( ) Fá ♯ da escala 3
( ) La da escala 2
( ) Sol da escala 2
( ) Fa ♯ da escala 2
( ) Mi da escala 1
( ) La da escala 1

Nota correspondente ao sinal $f(t)\cos(4400\pi t)$
( ) La da escala 1
( ) La da escala 2
( ) La da escala 3
( ) La da escala 4
( ) La da escala 5
( ) La da escala 6

• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere os diagramas de espectro de magnitudes de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ dados nos gráficos abaixo ($\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w) e \mathcal{F}\{g(t)\} = G(w)$). Assinale as alternativas que representam os diagramas de espectro de magnitudes de $h_1(t) = (f * g)(t)$ e $h_2(t) = f(t)\cos(2t)$, respectivamente.



• **Questão 5** (1.0 ponto) Dada a função periódica $f(t) = |\cos(t)|$, marque as alternativas que representam, respectivamente, os coeficientes de Fourier a_2 e b_4. Dica: Verifique a tabela de integrais indefinidas fornecida.

a_2

( ) $-\frac{4}{15\pi}$

( ) $-\frac{2}{15\pi}$

( ) $-\frac{1}{15\pi}$

( ) 0

( ) $\frac{1}{15\pi}$

( ) $\frac{2}{15\pi}$

( ) $\frac{4}{15\pi}$

b_4

( ) $-\frac{4}{15\pi}$

( ) $-\frac{2}{15\pi}$

( ) $-\frac{1}{15\pi}$

( ) 0

( ) $\frac{1}{15\pi}$

( ) $\frac{2}{15\pi}$

( ) $\frac{4}{15\pi}$

- **Questão 6** (2.5 ponto) Considere a função periódica $f(t) = |t|, \ -1 < t \leq 1$ e $f(t+2) = f(t)$. A respeito da série de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$$

responda os itens abaixo.

a) (0.5 ponto) Calcule a frequência fundamental w_1 e o período fundamental T.

b) (1.0 ponto) Calcule os coeficientes C_n

c) (1.0 ponto) Esboce o diagrama de espectro de magnitudes e de fase (as primeiras raias).

Dica: Verifique a tabela de integrais indefinidas fornecida.

- **Questão 7** (2.5 pontos) Aplique a técnica de transformada de Fourier para resolver a seguinte equação:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + 5u(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 3\delta(x-2), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$