UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2018/2
Prova da área IIB

1 - 6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} = \frac{1}{2}F(w - w_0) + \frac{1}{2}F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\|a\|}F\left(\frac{w}{a}\right), \quad a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|F(w)\|^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \|f(t)\|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|C_n\|^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(w_nt) + b_n\,\mathrm{sen}(w_nt)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_nt)dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_ne^{iw_nt}$, onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(w)\cos(wt) + B(w)\,\mathrm{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$, onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Tabela de integrais definidas:

1. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \quad (a>0)$	2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \quad (a>0)$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma} \quad (a>0,\ m\geq 0)$	4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma} \quad (a\geq 0,\ m>0)$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2}, & n<m\\ \frac{\pi}{4}, & n=m,\\ 0, & n>m\end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2}, & m>0\\ 0, & m=0\\ -\frac{\pi}{2}, & m<0\end{cases}$
7. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r>0)$	8. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a>0)$
9. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \quad (a>0)$	10. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \quad (a>0)$
11. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \quad (a>0)$	12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\operatorname{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $\displaystyle erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(ax)\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{4}, & (0<m<2a)\\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m)\\ 0, & (0<2a<m)\end{cases}$	16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases}\frac{\pi m}{2}, & (0<m\leq n)\\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\leq m)\end{cases}$
17. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \quad (a>0)$	18. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \quad (a>0)$
19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \quad (a>0,\ m\geq 0)$	20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \quad (a>0,\ m>0)$
21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \quad (a>0,\ m\geq 0)$	22. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a>0)$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$
$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}$

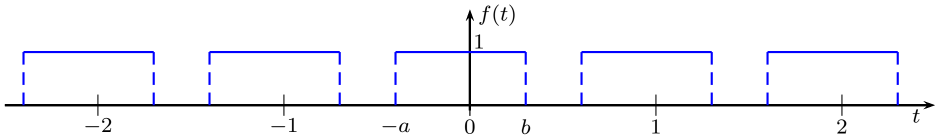
Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\displaystyle\int xe^{\lambda x}\,dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\displaystyle\int x^2e^{\lambda x}\,dx = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\displaystyle\int x^ne^{\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}dx+C$
$\displaystyle\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\displaystyle\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere a função periódica de período $T = 1$ cujo gráfico é esboçado abaixo:



Onde a e b são constantes positivas e menores que $1/2$. Quando escrita em séries de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(2\pi nt) + b_n \operatorname{sen}(2\pi nt)\right],$$

podemos afirmar que:

( ) $\frac{a_0}{2} = a + b$ e $b_n = 0$ quando $a = -b$ e $n \geq 1$.

( ) $a_0 = a + b$ e $a_n = 0$ quando $a = -b$ e $n \geq 1$.

(X) $\frac{a_0}{2} = a + b$ e $b_n = 0$ quando $a = b$ e $n \geq 1$.

( ) $a_0 = a + b$ e $b_n = 0$ quando $a = b$ e $n \geq 1$.

( ) $\frac{a_0}{2} = a$ e $a_n = 0$ quando $b = 0$ e $n \geq 1$.

( ) Nenhuma das anteriores.

( ) $a_n = \frac{\operatorname{sen}(2\pi na) - \operatorname{sen}(2\pi nb)}{\pi n}$

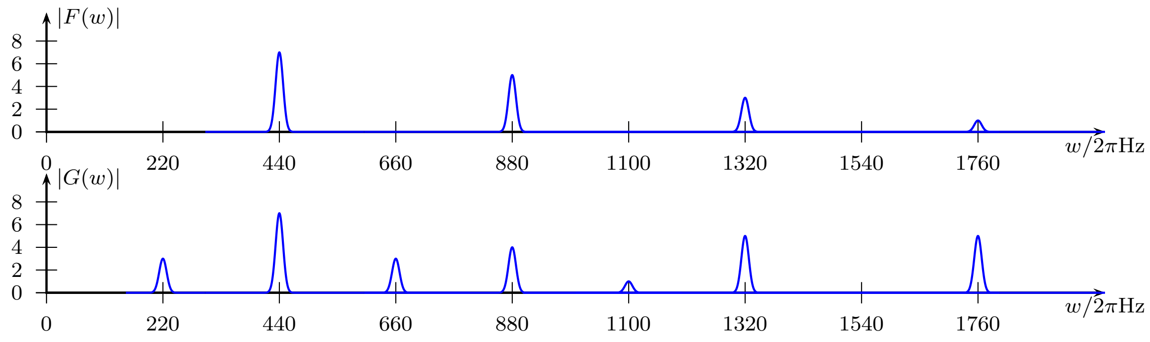
( ) $a_n = \frac{\cos(2\pi na) - \cos(2\pi nb)}{\pi n}$

( ) $a_n = \frac{\cos(2\pi na) + \cos(2\pi nb)}{\pi n}$

(X) $a_n = \frac{\operatorname{sen}(2\pi na) + \operatorname{sen}(2\pi nb)}{\pi n}$

( ) Nenhuma das anteriores.

• **Questão 2** (1.0 pontos) As funções $f(t)$ e $g(t)$ modelam sinais de áudio e seus diagramas de espectro de amplitudes são dados abaixo.



Sabendo que

$$h(t) = f(3t), \qquad E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \qquad E_h = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt,$$

assinale as alternativas corretas.

( ) $h(t)$ modela um Ré e $f(x) + g(x)$ modela um Lá 3.

( ) $h(t)$ modela um Ré e $f(x) + g(x)$ modela um Lá 4.

( ) $h(t)$ modela um Ré e $f(x) + g(x)$ modela um Lá 6.

(X) $h(t)$ modela um Mi e $f(x) + g(x)$ modela um Lá 3.

( ) $h(t)$ modela um Mi e $f(x) + g(x)$ modela um Lá 4.

( ) $h(t)$ modela um Mi e $f(x) + g(x)$ modela um Lá 6.

(X) $E_h = E_f/3$.

( ) $E_h = 3E_f$.

( ) $E_h = E_f$.

( ) Nenhuma das anteriores.

Solução do segundo item:

Vemos que $H(w) = \frac{1}{3}F(w/3)$

$$\begin{aligned} E_h &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(w)|^2 dw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w/3)/3|^2 dw \\ &= \frac{1}{6\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du \\ &= \frac{1}{3}E_f. \end{aligned}$$

Onde se substituiu $u = w/3$.

- **Questão 3** (1.0 ponto) Considere

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Assinale na primeira coluna $\mathcal{F}\{f(t) + f(-t)\}$ e, na segunda, $\mathcal{F}\{f(t) - f(-t)\}$.

( ) $F(w) = \dfrac{1+iw}{1+w^2}$

(X) $F(w) = \dfrac{2}{1+w^2}$

( ) $F(w) = \dfrac{1-iw}{1+w^2}$

( ) $F(w) = \dfrac{-2iw}{1+w^2}$

( ) Nenhuma das anteriores.

( ) $F(w) = \dfrac{2}{1+w^2}$

( ) $F(w) = \dfrac{1+iw}{1+w^2}$

(X) $F(w) = -\dfrac{2iw}{1+w^2}$

( ) $F(w) = \dfrac{1-iw}{1+w^2}$

( ) Nenhuma das anteriores.

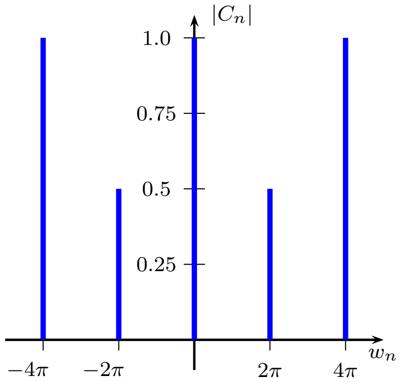
Solução:

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-iwt}dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+iw)t}dt = \frac{1}{-(1+iw)}\left. e^{-(1+iw)t}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{1+iw} \\ &= \frac{1-iw}{1+w^2} \end{aligned}$$

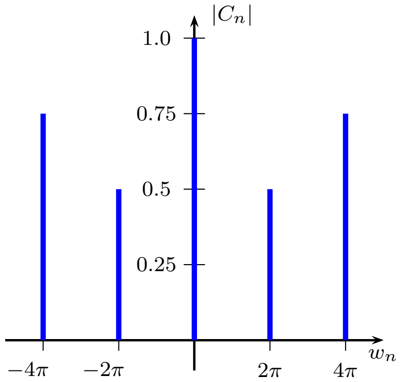
$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = \overline{F(w)} = \frac{1+iw}{1+w^2}$$

• **Questão 4** (1.0 pontos) Considere a função $f(t) = 1 + \text{sen}(2\pi t) + \frac{8}{5}\,\text{sen}(4\pi t) + \frac{6}{5}\cos(4\pi t)$. Assinale na primeira coluna o diagrama de espectro do módulo e, na segunda, o diagrama de espectro da fase.

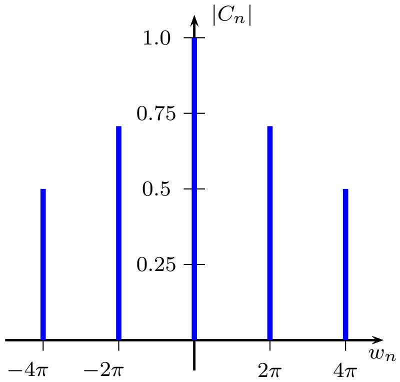
(X)



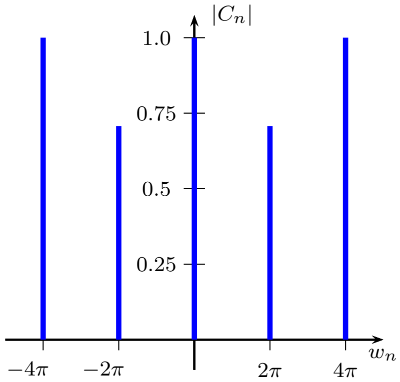
( )



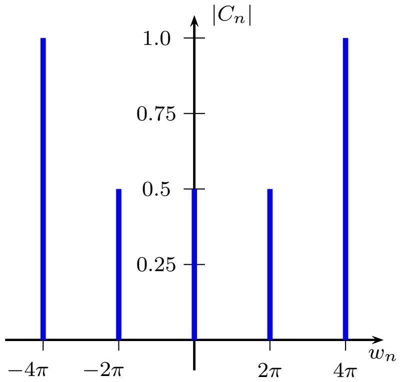
( )



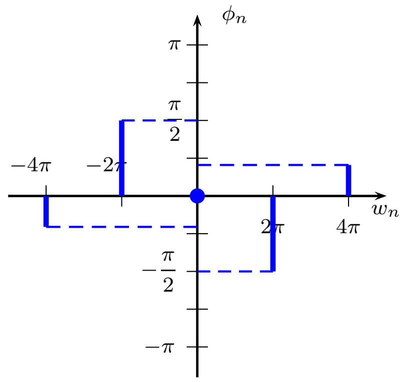
( )



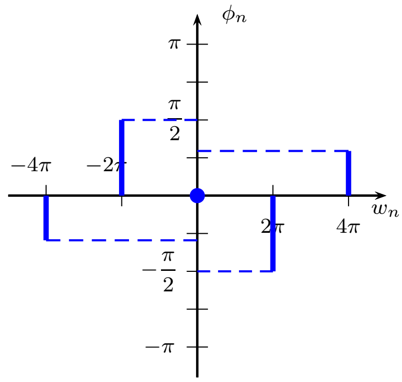
( )



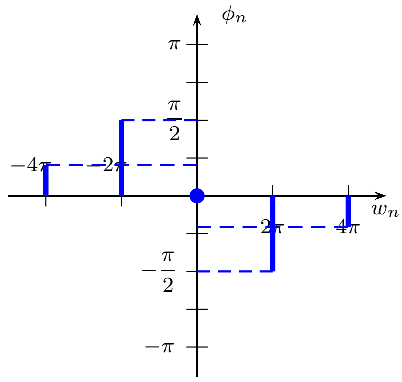
( )



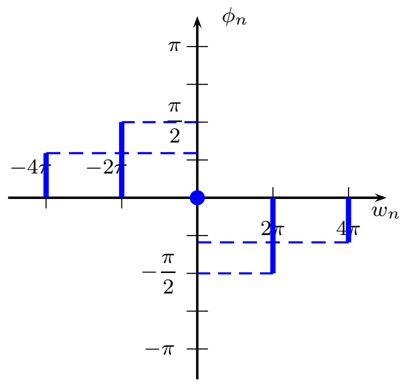
( )



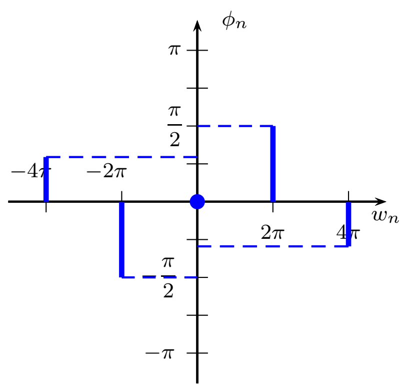
( )



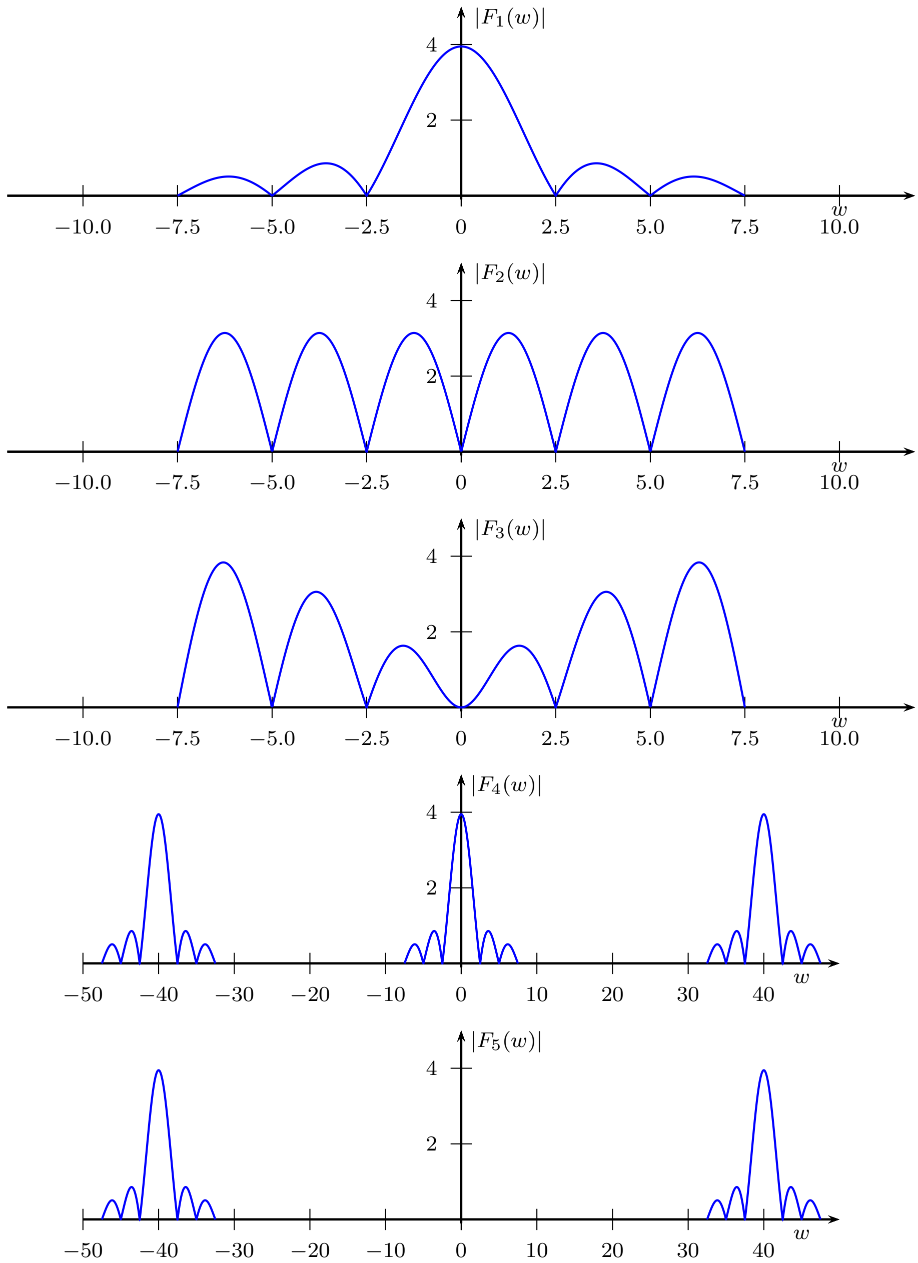
(X)



( )



• **Questão 5** (2.0 pontos) Considere os diagrama de espectro de magnitudes das Transformadas de Fourier das funções $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ e $f_4(t)$ dados nos gráficos abaixo.



• **Questão 5a** (1.0 ponto) Assinale as alternativas que indiquem relações compatíveis com os diagramas dados.

( ) $f_1'(t) = f_3(t)$

(X) $f_1'(t) = f_2(t)$

( ) $f_2'(t) = f_1(t)$

( ) $f_3'(t) = f_1(t)$

(X) $f_4(t) = f_1(t)\,(1 + 2\cos(40t))$

( ) $f_4(t) = f_1(t)\,(1 + \cos(40t))$

( ) $f_4(t) = 2f_1(t)\cos(40t)^2$

( ) $f_4(t) = 2f_1(t)\cos(20t)^2$

• **Questão 5b** (1.0 ponto) Assinale as alternativas que indiquem relações compatíveis com os diagramas dados.

(X) $f_1(t) * f_5(t) = 0$

( ) $f_1(t) * f_1(t) = f_2(t)$

( ) $f_1(t) * f_2(t) = f_3(t)$

( ) $f_4(t) * f_5(t) = f_1(t)$

( ) Nenhuma das anteriores.

( ) $f_4 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a) f(kT_a), \quad T_a = 15/\pi$

( ) $f_5 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a) f(kT_a), \quad T_a = 15/\pi$

( ) $f_4 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a) f(kT_a), \quad T_a = \pi/15$

( ) $f_5 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a) f(kT_a), \quad T_a = \pi/15$

(X) Nenhuma das anteriores.

• **Questão 6** (1.0 pontos) Resolva o seguinte problema de difusão de calor e trace um gráfico esboçando a evolução do perfil de temperatura $u(x,t)$ com o tempo.

$$u_t(x,t) - 2u_{xx}(x,t) - u_x(x,t) = 0$$
$$u(x,0) = 1000\delta(x+1).$$

Solução: Aplicamos a transforma de Fourier na variável x, obtemos a seguinte expressão para a equação transformada

$$U_t(k,t) - (ik)U(k,t) - 2(ik)^2U(k,t) = 0$$

onde foi usada a propriedade da derivada. A condição inicial se torna:

$$U(k,0) = 1000\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x+1)e^{-ikx}dx = 1000e^{ik}$$

Portanto temos o seguinte problema de valor inicial:

$$U_t(k,t) = (-2k^2 + ik)U(k,t)$$
$$U(k,0) = 1000e^{ik}$$

cuja solução é

$$U(k,t) = 1000e^{ik}e^{(-2k^2+ik)t} = 1000e^{ik(t+1)}e^{-2k^2t}$$

A multiplicação por $e^{ik(t+1)}$ indica um deslocamento no eixo x. Logo precisamos calcular:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x^{-1}\left\{e^{-2k^2t}\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2k^2t}e^{ikx}dk = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-2k^2t}\cos(kx)dk \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{8t}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{8t}}\end{aligned}$$

Portanto,

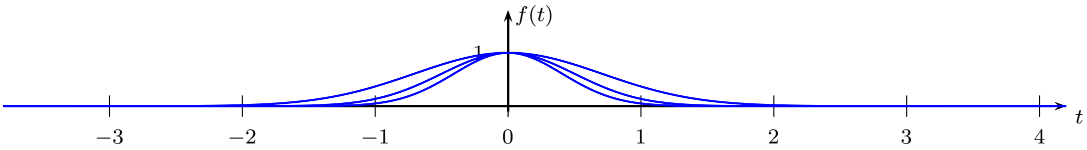
$$u(x,t) = \frac{500}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x+t+1)^2}{8t}}$$

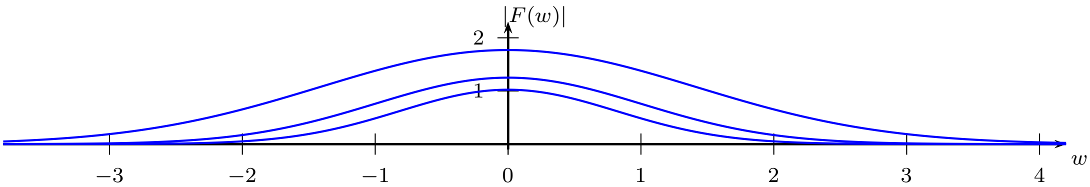
- **Questão 7** (3.0 pontos) Considere a função $h(t) = \cos(w_0 t)e^{-at^2}$ onde a é uma constante positiva.
  a) (1.0 ponto) Calcule a transformada de Fourier $F(w)$ quando $f(t) = e^{-at^2}$ onde a é uma constante positiva.
  b) (1.0 ponto) Esboce os gráficos de $f(t)$ e $|F(w)|$ para $a = 1$, $a = 2$ e $a = 3$.
  c) (1.0 ponto) Calcule $H(w)$ e esboce os gráficos de $h(t)$ e $|H(w)|$ para $a = 1$ e $w_0 = 10$.

Solução: a)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{e^{-at^2}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-iwt}dt = 2\int_0^{\infty} e^{-at^2}\cos(wt)dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}.\end{aligned}$$

Solução: b)





Solução: c)

$$H(w) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{(w-10)^2}{4}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{(w+10)^2}{4}}$$