**UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA**
**Departamento de Matemática Pura e Aplicada**
**MAT01168 - Turma A - 2019/1**
**Prova da área IIB**

| 1 - 5 | 6 | 7 | Total |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Nome:** ______________________________ **Cartão:** ______________
**Ponto extra:** ( )Wikipédia ( )Apresentação ( )Nenhum **Tópico:** _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Linearidade | $\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$ |
| 2. | Transformada da derivada | Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$<br>Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$ |
| 3. | Deslocamento no eixo $w$ | $\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w+ia)$ |
| 4. | Deslocamento no eixo $t$ | $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$ |
| 5. | Transformada da integral | Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$ |
| 6. | Teorema da modulação | $\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2}F(w-w_0) + \frac{1}{2}F(w+w_0)$ |
| 7. | Teorema da Convolução | $\mathcal{F}\{(f*g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$<br>$(F*G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$ |
| 8. | Conjugação | $\overline{F(w)} = F(-w)$ |
| 9. | Inversão temporal | $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$ |
| 10. | Simetria ou dualidade | $f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$ |
| 11. | Mudança de escala | $\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right), \quad a \neq 0$ |
| 12. | Teorema da Parseval | $\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2 dw$ |
| 13. | Teorema da Parseval para Série de Fourier | $\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$ |

Séries e transformadas de Fourier:

| | Forma trigonométrica | Forma exponencial |
|---|---|---|
| Série de Fourier | $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t)]$<br>onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, $T$ é o período de $f(t)$<br>$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt,$<br>$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_n t)dt,$<br>$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt$ | $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t},$<br>onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ |
| Transformada de Fourier | $f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(w)\cos(wt) + B(w)\operatorname{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real,<br>onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(wt)dt$ | $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw,$<br>onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$ |

Tabela de integrais definidas:

| | |
|---|---|
| 1. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$ | 2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$ |
| 3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$ | 4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma} \qquad (a\geq 0,\ m>0)$ |
| 5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2}, & n<m\\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \quad (m>0,\ n>0)\\ 0, & n>m\end{cases}$ | 6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2}, & m>0\\ 0, & m=0\\ -\frac{\pi}{2}, & m<0\end{cases}$ |
| 7. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$ | 8. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$ |
| 9. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$ | 10. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$ |
| 11. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$ | 12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\mathrm{sen}(ma)+\cos(ma))$ |
| 13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$ | 14. $\displaystyle erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$ |
| 15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(ax)\,\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{4}, & (0<m<2a)\\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m)\\ 0, & (0<2a<m)\end{cases}$ | 16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases}\frac{\pi m}{2}, & (0<m\leq n)\\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\leq m)\end{cases}$ |
| 17. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$ | 18. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$ |
| 19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$ | 20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$ |
| 21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$ | 22. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$ |

Identidades Trigonométricas:

| |
|---|
| $\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$ |
| $\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) = \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$ |
| $\mathrm{sen}(x)\cos(y) = \dfrac{\mathrm{sen}(x+y)+\mathrm{sen}(x-y)}{2}$ |

Frequências das notas musicais em hertz:

| Nota \ Escala | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Dó | 65,41 | 130,8 | 261,6 | 523,3 | 1047 | 2093 |
| Dó ♯ | 69,30 | 138,6 | 277,2 | 554,4 | 1109 | 2217 |
| Ré | 73,42 | 146,8 | 293,7 | 587,3 | 1175 | 2349 |
| Ré ♯ | 77,78 | 155,6 | 311,1 | 622,3 | 1245 | 2489 |
| Mi | 82,41 | 164,8 | 329,6 | 659,3 | 1319 | 2637 |
| Fá | 87,31 | 174,6 | 349,2 | 698,5 | 1397 | 2794 |
| Fá ♯ | 92,50 | 185,0 | 370,0 | 740,0 | 1480 | 2960 |
| Sol | 98,00 | 196,0 | 392,0 | 784,0 | 1568 | 3136 |
| Sol ♯ | 103,8 | 207,7 | 415,3 | 830,6 | 1661 | 3322 |
| Lá | 110,0 | 220,0 | 440,0 | 880,0 | 1760 | 3520 |
| Lá ♯ | 116,5 | 233,1 | 466,2 | 932,3 | 1865 | 3729 |
| Si | 123,5 | 246,9 | 493,9 | 987,8 | 1976 | 3951 |

Integrais:

| |
|---|
| $\displaystyle\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$ |
| $\displaystyle\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$ |
| $\displaystyle\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$ |
| $\displaystyle\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$ |
| $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$ |

- **Questão 1** (1.0 ponto) Assinale as alternativas que indicam representações corretas para o número complexo $Z = \left(\sqrt{3}+i\right)^8$

( ) $Z = -128\left(1+\sqrt{3}i\right)$

( ) $Z = -256\left(1+\sqrt{3}i\right)$

( ) $Z = 128\left(1+\sqrt{3}i\right)$

( ) $Z = 256\left(1+\sqrt{3}i\right)$

( ) Nenhuma das anteriores.

( ) $Z = 256e^{\frac{-2\pi i}{3}}$

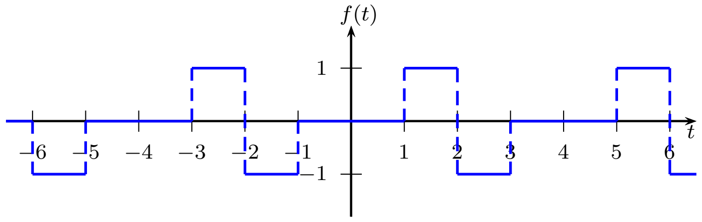
( ) $Z = 128e^{\frac{-2\pi i}{3}}$

( ) $Z = 256e^{\frac{-\pi i}{3}}$

( ) $Z = 128e^{\frac{-\pi i}{3}}$

( ) Nenhuma das anteriores.

- **Questão 2** (1.0 ponto) Considere a função periódica $f(t)$ constante por partes de período 4 cujo grafíco é esboçado abaixo:




e sua séries de Fourier dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{\pi}{2}nt\right) + b_n\left(\frac{\pi}{2}nt\right)\right].$$

Podemos afirmar que:

( ) $a_0 = 0$ e $a_n = 0$ quando $n \geq 1$.

( ) $a_0 \neq 0$ e $a_n = 0$ quando $n \geq 1$.

( ) $a_0 = 0$ e $a_n \neq 0$ quando $n \geq 1$.

( ) $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$ quando $n \geq 1$.

( ) Nenhuma das anteriores.

( ) $b_1 > 0$

( ) $b_1 = 0$

( ) $b_1 < 0$

( ) Não é possível determinar.

- **Questão 3** (1.0 ponto) Agora considere a função $g(t) = f(t)^2$, onde a $f(t)$ é função definida na *questão 2*.
Quando escrita em séries de Fourier $g(t)$ assume a seguinte forma:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t},$$

onde $w_n = \frac{2\pi}{T}$ e $T$ é o período fundamental de $g(t)$.

( ) $T = 1$.

( ) $T = 2$.

( ) $T = 4$.

( ) $T = 8$.

( ) Nenhuma das anteriores.

( ) $C_0 = \frac{1}{4}$, $C_1 = -\frac{1}{\pi}$

( ) $C_0 = \frac{1}{2}$, $C_1 = -\frac{1}{\pi}$

( ) $C_0 = \frac{1}{4}$, $C_1 = -\frac{2}{\pi}$

( ) $C_0 = \frac{1}{2}$, $C_1 = -\frac{2}{\pi}$

( ) Nenhuma das anteriores.

• **Questão 4** (2.0 pontos) Suponha que a função $f(t)$ represente os valores medidos por um microfone exposto ao som de um contrabaixo executando na faixa de 33Hz a 400Hz) e um oboé executando na faixa de 700Hz a 1500Hz. Seja dada por:

$$g(t) = \frac{10}{\pi} \frac{a^2 t}{(a^2 + t^2)^2}$$

onde $a = \dfrac{1}{2000\pi}$.

Defina $G(w) := \mathcal{F}\{g(t)\}$ e $h(t) := f(t) * g(t)$. Assinale as alternativas corretas e esboce a parte positiva do diagrama de espectro de amplitudes de $G(w)$ no espaço dado, indicando o ponto de máxima amplitude.

( ) $G(w) = 5a|w|ie^{-a|w|}$

( ) $G(w) = -5a|w|ie^{-a|w|}$

( ) $G(w) = 5awie^{-a|w|}$

( ) $G(w) = -5awie^{-a|w|}$

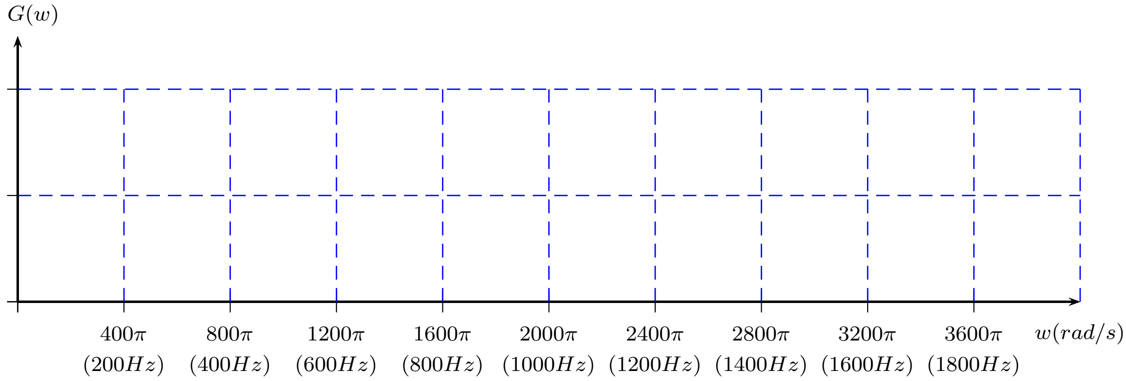
( ) Nenhuma das anteriores.

( ) A operação de convolução aplicada privilegia em $h(t)$ o som do contrabaixo em detrimento do oboé.

( ) A operação de convolução aplicada privilegia em $h(t)$ o som do oboé em detrimento do contrabaixo.

( ) A operação de convolução aplicada desloca todas as frequência para valores mais altos.

( ) A operação de convolução aplicada desloca todas as frequência para valores mais baixos.




• **Questão 5** (1.0 ponto) Considere a equação diferencial parcial dada por:

$$u_t(x,t) - u_x(x,t) = 0,$$
$$u(x,0) = f(x).$$

Assinale as alternativas que indicam $U(k,t) := \mathcal{F}_x\{u(x,t)\}$ e $u(x,t)$ em termos da função $f(x)$ dada. Considere a notação $F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$.

( ) $U(k,t) = F(k)e^{-ikt}$

( ) $U(k,t) = F(k)e^{-ik^2t}$

( ) $U(k,t) = F(k)e^{ik^2t}$

( ) $U(k,t) = F(k)e^{ikt}$

( ) Nenhuma das anteriores.

( ) $u(x,t) = f(x-t)$

( ) $u(x,t) = f(x+t)$

( ) $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/4t} dy$

( ) $u(x,t) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-t)^2/4t}$

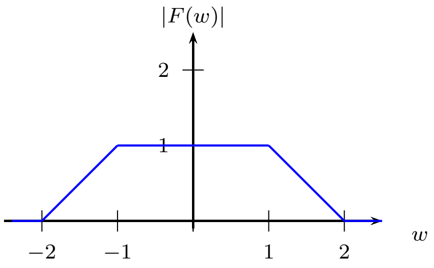
( ) Nenhuma das anteriores.

- **Questão 6** (2.0 ponto) Calcule a transformada de Fourier da função dada por:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j}\delta(t-j).$$

Observação: aplicar a transformada de Fourier vale até 1.0, somar a série vale até 1.5 e; separar parte real e imaginária vale até 2.0.

• **Questão 7** (2.0 pontos) Seja $f(t)$ uma função que possue transformada de Fourier $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. O gráfico abaixo apresenta o diagrama de espectro de magnitudes de $F(w)$.




Esboce o diagrama de magnitudes de $g(t) = f'(t)\cos(3t)$ e $h(t) = \dfrac{d}{dt}\left(f(t)\cos(3t)\right)$.