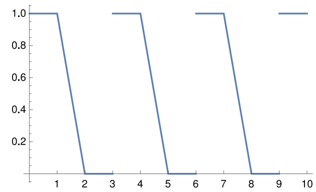
UFRGS – Instituto de Matemática e Estatística
Depto. de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 – Matemática Aplicada II – Turma C
3ª Avaliação – 13 de dezembro de 2019

Questão 1 *(1,5 pontos)*. Considere a função periódica no gráfico ao lado. Escolha a alternativa com o valor do coeficiente da série de Fourier seno associado à frequência $3\omega_0$, onde ω_0 é a frequência fundamental da função.



A função possui período $T = 3$, ou seja, frequência angular fundamental $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{3}$.
O coeficiente da série de Fourier seno associado à frequência $3\omega_0$, ou seja ω_3, é dado por

$$\begin{aligned}
b_3 &= \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\sin(\omega_3 t)dt \\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\sin(2\pi t)dt \\
&= \frac{2}{3}\left(\int_0^1 \sin(2\pi t)dt + \int_1^2 (2-t)\sin(2\pi t)dt\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\underbrace{\int_0^1 \sin(2\pi t)dt}_{=0} + \underbrace{\int_1^2 2\sin(2\pi t)dt}_{=0} - \int_1^2 t\sin(2\pi t)dt\right) \\
&= -\frac{2}{3}\left.\frac{\sin(2\pi t) - 2\pi t\cos(2\pi t)}{4\pi^2}\right|_{t=1}^{t=2} \\
&= \left(\frac{2\pi}{3\pi^2} - \frac{\pi}{3\pi^2}\right) = \frac{1}{3\pi}.
\end{aligned}$$

Questão 2 *(1,5 pontos)*. Escolha a alternativa que corresponde ao valor do coeficiente C_{-2} para série de Fourier complexa da função $f(t) = 3 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{1}{8}\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right)$:

A frequência fundamental de f é $\omega_0 = \dfrac{\pi}{4}$. Portanto, o coeficiente C_{-2} está associado ao termo $e^{-i\frac{\pi}{2}t}$. A partir de

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) &= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}t} - e^{-i\frac{\pi}{2}t}}{2i}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}t} + e^{-i\frac{\pi}{2}t}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{8i} + \frac{1}{10}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}t} + \left(-\frac{1}{8i} + \frac{1}{10}\right)e^{i\frac{\pi}{2}t}
\end{aligned}$$

temos então que $C_{-2} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{i}{8}$.

Questão 3 *(1,5 pontos)*. Dado que os coeficientes da série de Fourier complexa de uma função f de período fundamental $\dfrac{\pi}{2}$ satisfazem a relação

$$C_n = \frac{(i)^{n+1}n}{1+n^4},$$

escolha a alternativa que corresponde ao valor da integral $\int_{\pi}^{3\pi/2} f(t)\sin(8t)dt$.
Note que f admite a representação na forma trigonométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(4nt) + b_n\sin(4nt)\right)$$

com $a_n = C_n + C_{-n}$ e $b = i\left(C_n - C_{-n}\right)$ para $n = 0, 1, \ldots$ Por outro lado, como a integral é sobre um período completo, temos a relação de ortogonalidade $\int_{\tau}^{\tau+T} \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) dt = \frac{T}{2}\delta_{n,m}$, portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{3\pi/2} f(t)\sin(8t)dt &= \frac{\pi}{4}b_2 \\
&= i\frac{\pi}{4}\left(C_2 - C_{-2}\right) \\
&= i\frac{\pi}{4}\left(\frac{(i)^{2+1}2}{1+(2)^4} - \frac{(i)^{-2+1}(-2)}{1+(-2)^4}\right) \\
&= i\frac{\pi}{4}\left(-i\frac{2}{17} - i\frac{2}{17}\right) = \frac{\pi}{17}
\end{aligned}$$

Questão 4 *(1,5 pontos)*. A partir da relação entre a função e sua transformada na questão 5 e as propriedades da transformada de Fourier, escolha a alternativa com o valor da integral definida $\int_0^\infty \left(\frac{J_1(t)}{2t}\right)^2 dt$.

De acordo com o teorema de Parseval,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{J_1(t)}{2t}\right)^2 dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \left(1\text{-}\omega^2\right) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\omega\text{-}\frac{\omega^3}{3}\Big|_{\omega=-1}^{\omega=1}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(2\text{-}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\pi}.
\end{aligned}$$

Como o integrando é par,

$$\int_0^\infty \left(\frac{J_1(t)}{2t}\right)^2 dt = \frac{1}{3\pi}.$$

Questão 5 *(1,5 pontos)*. Dado que

$$f(t) = \frac{J_1(t)}{2t} \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} F(\omega) = \begin{cases} \sqrt{1-\omega^2} & , |\omega| \le 1 \\ 0 & , |\omega| > 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad G(\omega) = \begin{cases} \sqrt{9-\omega^2} & , |\omega| \le 3 \\ 0 & , |\omega| > 3 \end{cases},$$

escolha a alternativa que corresponde à transformada de Fourier inversa de G.

A função G pode ser reescrita como $3\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{3}\right)^2}$

$$G(\omega) = \begin{cases} 3\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{3}\right)^2} & , |\omega| \le 3 \\ 0 & , |\omega| > 3 \end{cases},$$

ou seja, $G(\omega) = 3F\left(\frac{\omega}{3}\right)$. A partir das propriedades da transformada de Fourier, temos que $\mathcal{F}^{-1}\left\{F\left(\frac{\omega}{3}\right)\right\} = 3f(3t)$, portanto

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{G\right\} = 9\frac{J_1(3t)}{2(3t)} = \frac{3J_1(3t)}{2t}$$

Questão 6 *(1,5 pontos)*. Um pulso de largura 2 centrado na origem e de amplitude $I_0 = 1$ possui transformada de Fourier inversa dada por $f(t) = \frac{\sin t}{\pi t}$. A partir das propriedades da transformada de Fourier, escolha a alternativa que corresponde à transformada inversa da soma de dois pulsos de largura 2 e amplitude $\frac{1}{2}$, um centrado em $\omega = 5$ e o outro centrado em $\omega = -5$.

Pulso de largura $2\omega_c$e amplitude I_0 possui T.I.F $f(t) = I_0 \dfrac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$. Seja $F(\omega)$ a função pulso na frequência, então a transformada inversa de

$$\frac{F(\omega-\omega_0)}{2} + \frac{F(\omega+\omega_0)}{2}$$

é dada por

$$f(t)\cos(\omega_0 t).$$

Então temos

$$\frac{\sin t}{\pi t}\cos 5t = \frac{1}{2\pi t}(-\sin 4t + \sin 6t)$$

Questão 7 *(1,5 pontos)***.** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{1}{4}u_{tt} = u_{xx} - 2u & ,(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x) & ,x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & ,x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

onde $f(t)$ é uma função que admite transformada de Fourier $F(k)$. Dado que a solução geral da EDO $y'' = -\alpha^2 y$ é da forma $y(t) = A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t)$, escolha a alternativa que corresponde à solução do problema no domínio do número de onda k, $U(k,t)$.
Seja $U(k,t)$ a transformada da solução na variável x, então U é solução da equação

$$\frac{1}{4}U_{tt} = -k^2U - 2U = -\left(k^2+2\right)U$$

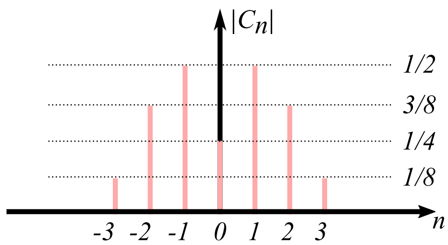
com condições iniciais $U(k,0) = F(k) = \mathcal{F}\{f\}(k)$ e $U_t(k,0) = 0$. para cada . A solução geral da equação diferencial para U é dada por

$$U(k,t) = A\cos\left(2\sqrt{k^2+2}t\right) + B\sin\left(2\sqrt{k^2+2}t\right).$$

A partir das condições iniciais temos por fim

$$U(k,t) = F(k)\cos\left(2\sqrt{k^2+2}t\right).$$

Questão 8 *(1,5 pontos)***.** A partir do espectro de amplitude para a função f de período π, determine o valor de $\left|\int_0^{2\pi} f(t)dt\right|$



A integral é sobre dois períodos fundamentais, ou seja, é da forma

$$\int_0^{2T} f(t)dt.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = C_0,$$

portanto

$$\left|\int_0^{2T} f(t)dt\right| = 2T\,|C_0| = 2\pi\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$