UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2022/1
Prova da área IIB

1 - 4	5	6	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Questão 1.(A) (0.8pt) A decomposição em série de Fourier de $f(t) = \begin{cases} |t| & , -1 \le t < 1 \\ f(t+2) = f(t), & t \in \mathbb{R} \end{cases}$ produz

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos(\pi t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\pi t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\pi t) + \frac{1}{7^2}\cos(7\pi t) + \frac{1}{9^2}\cos(9\pi t) + \cdots + \right), \; t \in \mathbb{R}$$

O equacionamento de $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ implica:

( ) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi}{4}$

(X) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi}{4}$

( ) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{4}$

( ) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{4}$

( ) nenhuma das alternativas anteriores

Solução:
$f' = -\frac{4}{\pi^2}\left(-\pi\,\text{sen}(\pi t) - \pi\frac{\text{sen}(3\pi t)}{3} - \pi\frac{\text{sen}(5\pi t)}{5} - \pi\frac{\text{sen}(7\pi t)}{7} - \pi\frac{\text{sen}(9\pi t)}{9} + \dots\right)$
aplicando $t = \frac{1}{2}$, usamos $\text{sen}(\frac{\pi}{2}) = \text{sen}(\frac{5\pi}{2}) = \text{sen}(\frac{9\pi}{2}) = \cdots = 1$
mas porém $\text{sen}(\frac{3\pi}{2}) = \text{sen}(\frac{7\pi}{2}) = \text{sen}(\frac{11\pi}{2}) = \cdots = -1$
e assim $1 = f'(\frac{1}{2}) = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots\right)$
finalmente implica na resposta marcada ao lado.

Questão 1.(B) (1.6pt) Considere a função $f(t) = 8\cos^4(t)$. Calcule os coeficientes da expansão em série de Fourier de $f(t)$ e assinale na primeira coluna a representação trigonométrica e na segunda a representação exponencial.

( ) $3 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\cos(2nt) + \frac{n}{2n+1}\text{sen}(2nt)\right)$

(X) $3 + 4\cos(2t) + \cos(4t)$

( ) $3 + 4\cos(t) + 2\cos(2t) + \cos(3t) + \frac{1}{2}\cos(4t)$

( ) $3 + 4\,\text{sen}(t) + 2\,\text{sen}(2t)$

( ) nenhuma das anteriores

( ) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{3}{2n+1} - \frac{in}{2n^2+1}\right)e^{2nit}$

( ) $\frac{i}{2}e^{-4it} + 2e^{-2it} + 3 + 2e^{2it} - \frac{i}{2}e^{4it}$

( ) $\frac{i}{2}e^{-2it} + 2ie^{-it} + 3 - 2ie^{it} - \frac{i}{2}e^{2it}$

(X) $\frac{1}{2}e^{-4it} + 2e^{-2it} + 3 + 2e^{2it} + \frac{1}{2}e^{4it}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: Aqui $i^2 = -1$. Primeiramente:

$$f = 2(2\cos^2(t))^2 = 2(1+\cos(2t))^2 = 2(1 + 2\cos(2t) + \cos^2(2t)) = 2 + 4\cos(2t) + 2\cos^2(2t) = \\ 2 + 4\cos(2t) + 1 + \cos(4t) = 3 + 4\cos(2t) + \cos(4t)$$

e então
$$f = 3 + 4\frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} + \frac{e^{4it} + e^{-4it}}{2} = \frac{1}{2}e^{-4it} + 2e^{-2it} + 3 + 2e^{2it} + \frac{1}{2}e^{4it}$$

Questão 2. (0.8pt) Considere $f(t) = te^{-|t|}$. Sobre a transformada de Fourier $F(w)$ de $f(t)$, é correto:

(X) $F(w) = \frac{-4iw}{(1+w^2)^2}$

( ) $F(w) = \frac{-2iw}{(1+w^2)^2}$

( ) $F(w) = \frac{-2w}{(1+w^2)^2}$

( ) $F(w) = \frac{1-w^2}{(1+w^2)^2}$

( ) nenhuma das alternativas anteriores

Solução: uma vez que $te^{-|t|}$ é uma função IMPAR,
$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} te^{-|t|}e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} te^{-|t|}(\cos(wt) - i\,\text{sen}(wt))dt =$
$0 - i\int_{-\infty}^{\infty} te^{-|t|}\text{sen}(wt)dt = -2i\int_{0}^{\infty} te^{-t}\text{sen}(wt) = -2i\frac{2(1)w}{(1^2+w^2)^2} =$
$-\frac{4iw}{(1+w^2)^2}$

Questão 3. (1.6pt) Resolva o seguinte problema de difusão de calor: $\begin{cases} 4u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = \delta(x-1) \end{cases}$

Assinale na primeira coluna a transformada de Fourier $U(k,t) = \mathcal{F}\{u(x,t)\}$ e na segunda a solução $u(x,t)$.

( ) $U(k,t) = e^{-ik}e^{-2k^2 t}$

( ) $U(k,t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-k^2 t/4}$

( ) $U(k,t) = e^{-k^2 t/2}$

( ) $U(k,t) = \dfrac{e^{-ik}}{2\sqrt{\pi t}} e^{-k^2 t/4}$

(X) nenhuma das alternativas anteriores

(X) $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-1)^2}{t}}$

( ) $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{t}}$

( ) $u(x,t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$

( ) $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+1)^2}{t}}$

( ) nenhuma das alternativas anteriores

Solução:

$4U_t = (ik)^2 U = -k^2 U \Rightarrow U_t = -\dfrac{k^2}{4} U \Rightarrow U(k,t) = U(k,0)e^{-\frac{k^2 t}{4}}$

Por outro lado $U(k,0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-1)e^{-ikx}dx = e^{-ik}$ implica $U(k,t) = e^{-ik}e^{-\frac{k^2 t}{4}}$

Por outro lado, $\mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{-\frac{k^2 t}{4}}\right] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2 t}{4}} e^{ikx} dk = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2 t}{4}} (\cos(kx) + i\,\mathrm{sen}(kx))dk$

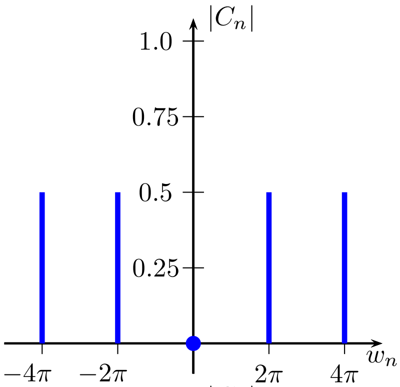
e como consequência da paridade de $e^{-\frac{k^2 t}{4}}$ em relação a k,

$\mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{-\frac{k^2 t}{4}}\right] = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{k^2 t}{4}} \cos(kx)dk = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t/2}} e^{-\frac{x^2}{4t/4}} = \dfrac{e^{-x^2/t}}{\sqrt{\pi t}}$

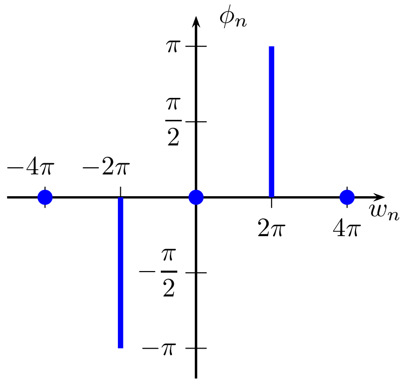
Finalmente, pela propriedade da translação, $u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{-ik}e^{-\frac{k^2 t}{4}}\right] = \left.\dfrac{e^{-x^2/t}}{\sqrt{\pi t}}\right|_{x=x-1} = \dfrac{e^{-\frac{(x-1)^2}{t}}}{\sqrt{\pi t}}$

Questão 4. (1.2pt) Considere a função $f(t) = \cos(4\pi t) + 2\,\mathrm{sen}^2(\pi t)$. Sobre o diagrama de espectro de módulo (primeira coluna) e diagrama de espectro de fase, estão corretos:

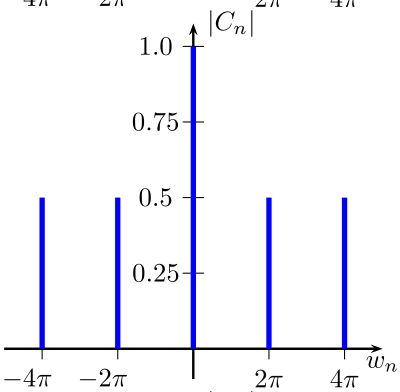
( )



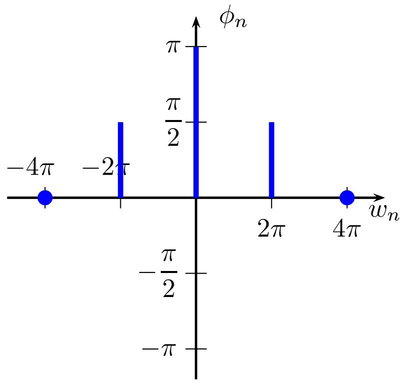
(X)



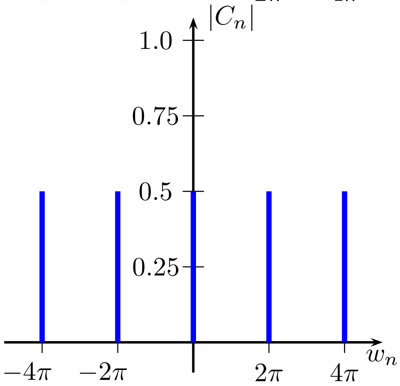
(X)



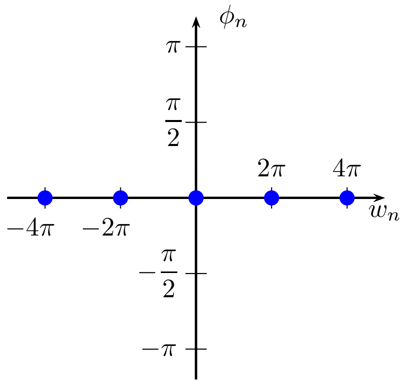
( )



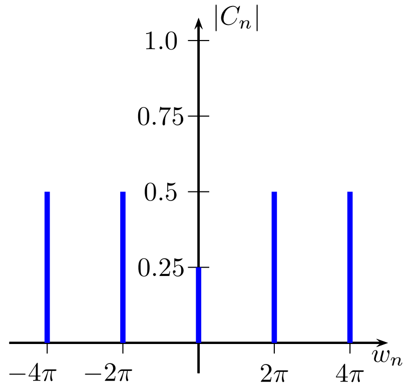
( )



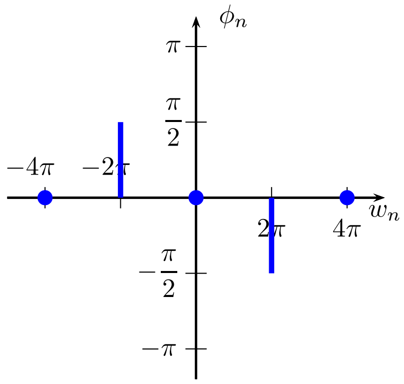
( )



( )



( )



( ) nenhuma das alternativas anteriores

( ) nenhuma das alternativas anteriores

Solução: Primeiramente, $f(t) = \cos(4\pi t) + 1 - \cos(2\pi t)$ e segue

$$f(t) = 1 - \frac{e^{2\pi it} + e^{-2\pi it}}{2} + \frac{e^{4\pi it} + e^{-4\pi it}}{2} = \frac{1}{2}e^{-4\pi it} - \frac{1}{2}e^{-2\pi it} + 1 - \frac{1}{2}e^{2\pi it} + \frac{1}{2}e^{4\pi it}$$

e segue $C_0 = 1$, $C_{-2} = C_2 = \frac{1}{2}$, e também $C_{-1} = C_1 = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Segue} \begin{cases} |C_{-2}| = 0.5 & , \phi_{-2} = 0 \\ |C_{-1}| = 0.5 & , \phi_{-1} = \pi \text{ ou } -\pi \\ |C_0| = 1 & , \phi_0 = 0 \\ |C_1| = 0.5 & , \phi_1 = \pi \text{ ou } -\pi \\ |C_2| = 0.5 & , \phi_2 = 0 \end{cases}$$

Questão 5.(A) (1.0pt) Obtenha os coeficientes $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ da série de Fourier da função periódica

$$g(x) = 2\operatorname{sen}^3(x) + 3\cos(2x)$$

Solução:

$$g(x) = \operatorname{sen}(x)[2\operatorname{sen}^2(x)] + 3\cos(2x) = \operatorname{sen}(x)[1 - \cos(2x)] + 3\cos(2x) = \operatorname{sen}(x) + 3\cos(2x) - \operatorname{sen}(x)\cos(2x)$$

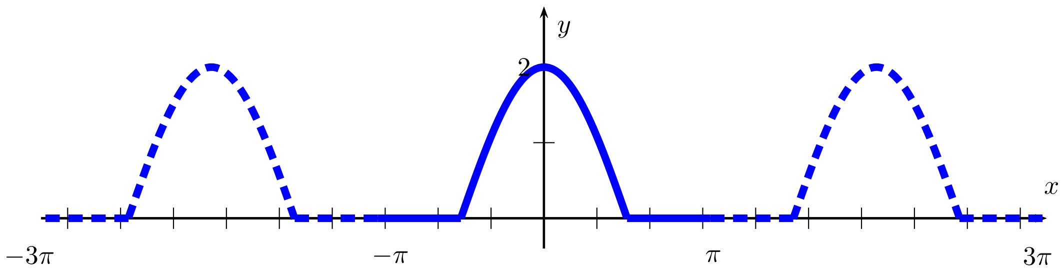
aplicando relação trigonométrica do formulário

$$g(x) = \operatorname{sen}(x) + 3\cos(2x) - \frac{\operatorname{sen}(x+2x) + \operatorname{sen}(x-2x)}{2} = \operatorname{sen}(x) + 3\cos(2x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(3x) =$$
$$\frac{3}{2}\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(3x) + 3\cos(2x)$$

portanto $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_3 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 3$ e todos os demais são nulos.

Questão 5.(B) (1.0pt) Considerando os coeficientes $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ da série de Fourier da função periódica

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) & , x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & , x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \bigcup [\frac{\pi}{2}, \pi) \\ f(x+2\pi) & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$ representada na figura abaixo



preencha com os valores numéricos:

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3

Solução: a função é par, assim $b_n = 0$ para todo n. A função é periódica e seu período é $T = 2\pi$.

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2\cos(x)dx = \frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen}(x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2\cos(x)\cos(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}[1 + \cos(2x)]\,dx =$$
$$\frac{2}{\pi}\left[x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 1$$

Por outro lado, para $n > 1$,

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2\cos(x)\cos(nx)dx =$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x))\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}((n+1)x)}{n+1} + \frac{\operatorname{sen}((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi/2} \quad (\dagger)$$

mas observamos

$$\begin{cases} \operatorname{sen}((n-1)\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(n\pi/2)\cos(\pi/2) - \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(n\pi/2) = -\cos(n\pi/2) \\ \operatorname{sen}((n+1)\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(n\pi/2)\cos(\pi/2) + \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(n\pi/2) = \cos(n\pi/2) \end{cases}$$

e assim

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cos(n\pi/2)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2}{\pi}\cos(n\pi/2)\frac{-2}{n^2-1} = \frac{-4\cos(n\pi/2)}{\pi(n^2-1)}, n > 1$$

implica nos valores numéricos.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3
$\frac{4}{\pi}$	1	$\frac{4}{3\pi}$	0	$\frac{-4}{15\pi}$	0	0	0

Alternativamente, a partir de (†),

$$\begin{cases} a_2 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(3\pi/2)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{1}\right] = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{4}{3\pi} \\ a_3 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(4\pi/2)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2\pi/2)}{2}\right] = 0 \\ a_4 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(5\pi/2)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(3\pi/2)}{1}\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{-4}{15\pi} \end{cases}$$

Questão 6 Considere o problema

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = -u, \text{ para todos } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

6A.(0.8pt) Obtenha a transformada de Fourier $F(\cdot)$ de $f(x) = e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$

6B.(1.2pt) Encontre a solução $u(x,t)$ (e a respectiva transformada de Fourier $U(\cdot,t)$) do problema do enunciado para $f(x)$ conforme definida em **6A**.

Solução: (*) como consequência da paridade de $e^{-|x|}$

(A) $$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-iwx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}(\cos(wx) - i\operatorname{sen}(wx))dx \overset{*}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\cos(wx)dx \overset{*}{=} 2\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(wx)dx$$

e assim

$$F(w) = 2\frac{1}{1+w^2} = \frac{2}{1+w^2}.$$

(B) Aplicando a transformada de Fourier na variável x

$$U_t + 2iwU = -U \Rightarrow U_t = (-1-2iw)U \Rightarrow U(w,t) = U(w,0)e^{-(1+2iw)t}$$

onde $U(w,0) = \mathcal{F}(f(x))$ foi obtido no subítem (A) desta questão.

Assim temos $U(w,t) = e^{-t}F(w)e^{-2iwt}$, o que implica

$$u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{-t}F(w)e^{-2iwt}\right] = e^{-t}\mathcal{F}_x^{-1}\left[F(w)e^{-2iwt}\right] = e^{-t}f(x-2t) = e^{-t}e^{-|x-2t|}$$

□