UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D/D2 - 2022/1
Prova da área IIB

1 - 5	**6**	**7**	**Total**

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w+ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} = \frac{1}{2}F(w-w_0) + \frac{1}{2}F(w+w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f*g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F*G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cos(w_nt) + b_n\,\mathrm{sen}(w_nt)\right]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_nt)dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_ne^{iw_nt}$, onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(A(w)\cos(wt) + B(w)\,\mathrm{sen}(wt)\right)dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$, onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma} \qquad (a\geq 0,\ m>0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\int_0^\infty xe^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$
11. $\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\mathrm{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(ax)\,\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	22. $\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$
$\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
$\mathrm{sen}(x)\cos(y) = \frac{\mathrm{sen}(x+y)+\mathrm{sen}(x-y)}{2}$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\int x\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$

• **Questão 1** (2.0 pontos) Considere a função

$$f(t) = 1 - 2\cos(2t) - 2\,\mathrm{sen}(2t) + \cos(3t) - 3\,\mathrm{sen}(3t)$$

e sua expansão em série de Fourier em que w_1 é a frequência fundamental. Sobre a função $f(t)$ e os coefientes da sua série de Fourier, responda:

Frequência fundamental

( ) $w_1 = 1/2$

(X) $w_1 = 1$

( ) $w_1 = 2$

( ) $w_1 = 3$

( ) $w_1 = 4$

Fase de C_2

( ) $\phi_2 = \dfrac{\pi}{4}$

( ) $\phi_2 = \dfrac{\pi}{2}$

(X) $\phi_2 = \dfrac{3\pi}{4}$

( ) $\phi_2 = \tan^{-1}(3)$

( ) $\phi_2 = \tan^{-1}(3) + \pi$

Módulo de C_2

( ) $|C_2| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

( ) $|C_2| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(X) $|C_2| = \sqrt{2}$

( ) $|C_2| = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

( ) $|C_2| = 2$

Potência Média $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T |f(t)|^2 dt$

( ) $\bar{P}_f = 3$

( ) $\bar{P}_f = 6$

( ) $\bar{P}_f = 9$

(X) $\bar{P}_f = 10$

( ) $\bar{P}_f = 15$

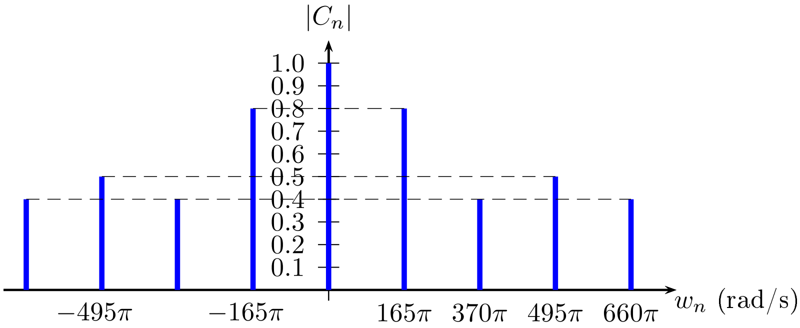
Solução:

$$C_2 = \frac{a_2 - ib_2}{2} = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i, \quad |C_2| = \sqrt{2}, \quad \phi_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

$$C_3 = \frac{a_3 - ib_3}{2} = \frac{1+3i}{2}, \quad |C_3| = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$\bar{P}_f = |C_0|^2 + 2|C_2|^2 + 2|C_3|^2 = 1 + 4 + 5 = 10$$

• **Questão 2** (1.0 pontos) Considere uma aproximação discreta do diagrama de espectro de uma nota Mi 2 ($82,5\,\mathrm{Hz}$) dada pelo sinal real $f(t)$.



O diagrama de espectro de fase do sinal $f(t)$ é zero para frequência $w_0 = 0$ e $-\dfrac{\pi}{2}$ para todas as frequências positivas. Responda os itens corretamente:

Nota produzida por $g(t) = f(3t)$

( ) Lá 2

( ) Lá 3

( ) Mi 4

(X) Si 3

( ) Si 5

Série de Fourier trigonométrica de $f(t)$

( ) $f(t) = 1 + 0,8\cos(165\pi t) + 0,4\cos(370\pi t) + 0,5\cos(495\pi t) + 0,4\cos(660\pi t)$

( ) $f(t) = 1 + 0,8\,\mathrm{sen}(165\pi t) + 0,4\,\mathrm{sen}(370\pi t) + 0,5\,\mathrm{sen}(495\pi t) + 0,4\,\mathrm{sen}(660\pi t)$

( ) $f(t) = \dfrac{1}{2} + 0,8\,\mathrm{sen}(165\pi t) + 0,4\,\mathrm{sen}(370\pi t) + 0,5\,\mathrm{sen}(495\pi t) + 0,4\,\mathrm{sen}(660\pi t)$

( ) $f(t) = 1 + 1,6\cos(165\pi t) + 0,8\cos(370\pi t) + \cos(495\pi t) + 0,8\cos(660\pi t)$

(X) $f(t) = 1 + 1,6\,\mathrm{sen}(165\pi t) + 0,8\,\mathrm{sen}(370\pi t) + \mathrm{sen}(495\pi t) + 0,8\,\mathrm{sen}(660\pi t)$

• **Questão 3** (2.0 pontos) Seja $f(t) = e^{-t^2}$, $g(t) := \mathcal{F}^{-1}\left\{F(w+2) + F(w-2)\right\}$, $h(t) := \mathcal{F}^{-1}\left\{G\left(\frac{w}{2}\right)\right\}$ e $p(t) = f(t)e^{3t}$, onde $F(w) = \mathcal{F}\left\{f(t)\right\}$, $G(w) = \mathcal{F}\left\{g(t)\right\}$ e $P(w) = \mathcal{F}\left\{p(t)\right\}$. Responda corretamente.

$g(2)$

( ) $g(2) = e^{-4}$

( ) $g(2) = e^{-4}\cos(2)$

( ) $g(2) = e^{-2}\cos(2)$

(X) $g(2) = 2e^{-4}\cos(4)$

( ) $g(2) = 2e^{-4}$

$F(w)$

( ) $F(w) = \pi e^{-w^2/2}$

( ) $F(w) = e^{-w^2}$

( ) $F(w) = e^{-w^2/4}$

( ) $F(w) = \sqrt{\pi}e^{-w^2}$

(X) $F(w) = \sqrt{\pi}e^{-w^2/4}$

$h(3)$

( ) $h(3) = 2e^{-9}\cos(6)$

(X) $h(3) = 4e^{-36}\cos(12)$

( ) $h(3) = 4e^{-36}\cos(6)$

( ) $h(3) = e^{-9}\cos(6)$

( ) $h(3) = 2e^{-18}\cos(12)$

$P(w)$

( ) $P(w) = \sqrt{\pi}e^{-(w+3)^2/4}$

(X) $P(w) = \sqrt{\pi}e^{-(w+3i)^2/4}$

( ) $P(w) = e^{-(w+3)^2/2}$

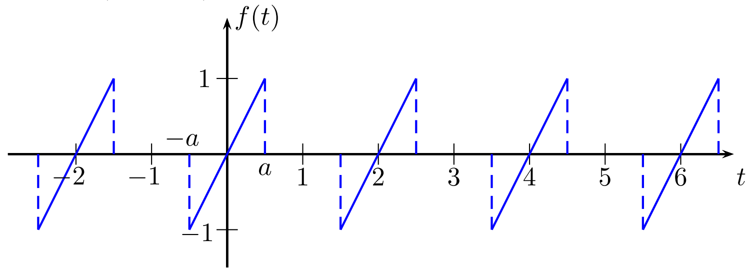
( ) $P(w) = e^{-(w-3i)^2/4}$

( ) $P(w) = \sqrt{\pi}e^{-(w-3i)^2/4}$

Solução:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= 2f(t)\cos(2t) = 2e^{-|t|^2}\cos(2t) \\
h(t) &= 2g(2t) = 4e^{-|2t|^2}\cos(4t) \\
F(w) &= 2\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(wt)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-w^2/4} \\
P(w) &= F(w+3i)
\end{aligned}
$$

• **Questão 4** (3.0 ponto) Considere a função periódica de período $T = 2$ cujo gráfico é esboçado abaixo:



Aqui a é uma constante positiva menor que 1. Escreva esta funçaõ em séries de Fourier na seguinte forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\pi n t) + b_n \operatorname{sen}(\pi n t)\right],$$

Trace o diagrama de amplitudes e o de fase quando $a = 1/2$ com pelo menos duas rais positivas e duas negativas.

Solução:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt, \quad w_n = \frac{2\pi n}{T} \\
&= \int_{-a}^{a} f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt = \frac{2}{a}\int_0^a t\operatorname{sen}(w_n t)dt \\
&= \frac{2}{a}\left(\frac{\operatorname{sen}(w_n t) - w_n t\cos(w_n t)}{w_n^2}\right)\Bigg|_0^a \\
&= \frac{2}{a}\left(\frac{\operatorname{sen}(w_n a) - w_n a\cos(w_n a)}{w_n^2}\right) \\
&= \frac{2}{a}\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi n a) - \pi n a\cos(\pi n a)}{\pi^2 n^2}\right)
\end{aligned}$$

Assim:

$$f(t) = \frac{2}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi n a) - \pi n a\cos(\pi n a)}{n^2}\right)\operatorname{sen}(\pi n t).$$

Assim para $a = 1/2$

$$C_n = \frac{a_n - i_b n}{2} = i\frac{\pi n\cos(\pi n/2) - 2\operatorname{sen}(\pi n/2)}{\pi^2 n^2}$$

Portanto:

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \dfrac{i}{\pi n}, & n = 4k, \quad n \neq 0 \\ \dfrac{-2i}{\pi^2 n^2}, & n = 4k+1 \\ \dfrac{-i}{\pi n}, & n = 4k+2 \\ \dfrac{2i}{\pi^2 n^2}. & n = 4k+3 \end{cases}$$

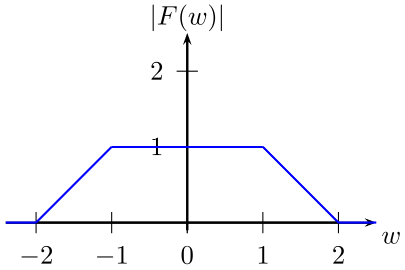
Decompondo da forma amplitude e fase para $n > 0$, temos:

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi n}e^{i\pi/2}, & n = 4k \\ \dfrac{2}{\pi^2 n^2}e^{-i\pi/2}, & n = 4k+1 \\ \dfrac{1}{\pi n}e^{-i\pi/2}, & n = 4k+2 \\ \dfrac{2}{\pi^2 n^2}e^{i\pi/2}. & n = 4k+3 \end{cases}$$

Decompondo da forma amplitude e fase para $n < 0$, temos:

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi n}e^{-i\pi/2}, & n = 4k \\ \dfrac{2}{\pi^2 n^2}e^{-i\pi/2}, & n = 4k+1 \\ \dfrac{1}{\pi n}e^{i\pi/2}, & n = 4k+2 \\ \dfrac{2}{\pi^2 n^2}e^{i\pi/2}. & n = 4k+3 \end{cases}$$

• **Questão 7** (2.0 pontos) Seja $f(t)$ uma função que possue transformada de Fourier $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. O gráfico abaixo apresenta o diagrama de espectro de magnitudes de $F(w)$.



Esboce o diagrama de magnitudes de $g(t) = f\left(\frac{t}{2}\right)\cos(2t)$ e $h(t) = f'\left(\frac{t}{2}\right)$.

Vemos que $\mathcal{F}\left\{f(t/2)\right\} = 2F(2w)$ e $\mathcal{F}\left\{f(t/2)\cos(2t)\right\} = F(2w-4) + F(2w+4)$

Além disso, $\mathcal{F}\left\{f'(t)\right\} = iwF(w)$ e $\mathcal{F}\left\{f'(t/2)\right\} = 2iwF(2w)$