UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2022/2
Prova da área IIB

1 - 4	5	6	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro. Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\alpha\mathcal{F}\{f(t)\}+\beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)=0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\}=iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to\pm\infty} f'(t)=0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\}=-w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\}=F(w+ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\}=e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0)=0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\}=\dfrac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\}=\frac{1}{2}F(w-w_0)+\frac{1}{2}F(w+w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f*g)(t)\}=F(w)G(w)$, onde $(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F*G)(w)=2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)}=F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\}=F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\}=\frac{1}{\vert a\vert}F\left(\frac{w}{a}\right), \quad a\neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}\vert f(t)\vert^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vert F(w)\vert^2dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T\vert f(t)\vert^2dt=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\vert C_n\vert^2$

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{N}[a_n\cos(w_nt)+b_n\operatorname{sen}(w_nt)]$ onde $w_n=\frac{2\pi n}{T}$ T é o período de $f(t)$, $a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)dt$, $a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_nt)dt=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(w_nt)dt$, $b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(w_nt)dt=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\operatorname{sen}(w_nt)dt$	$f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{iw_nt}$, onde $C_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(w)\cos(wt)+B(w)\operatorname{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\operatorname{sen}(wt)dt$	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{iwt}dw$ $F(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iwt}dt$

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma} \qquad (a\geq 0,\ m>0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\int_0^\infty xe^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$
11. $\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\operatorname{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(ax)\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	22. $\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Identidades Trigonométricas:

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}$$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$$

$$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$$

$$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$$

$$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$$

$$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$$

Questão 1.(2.0pt) Considerando a expansão em série de Fourier de $f(t) = 4\,\mathrm{sen}^3(2t)$, assinale na primeira coluna sua representação trigonométrica e na segunda sua representação exponencial. Aqui $i^2 = -1$.

( ) $\mathrm{sen}(2t) - \mathrm{sen}(6t)$

( ) $3\,\mathrm{sen}(2t) - \mathrm{sen}(6t)$

( ) $3\,\mathrm{sen}(2t) + \mathrm{sen}(6t)$

( ) $2\,\mathrm{sen}(2t) - \mathrm{sen}(4t) + \mathrm{sen}(6t)$

( ) $4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(nt)}{1+4/n}$

( ) nenhuma das anteriores

( ) $2i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n n e^{nit}}{n+4}$

( ) $-\frac{i}{2}e^{-6it} + \frac{3i}{2}e^{-2it} - \frac{3i}{2}e^{2it} + \frac{i}{2}e^{6it}$

( ) $-\frac{i}{2}e^{-6it} + \frac{i}{2}e^{-2it} - \frac{i}{2}e^{2it} + \frac{i}{2}e^{6it}$

( ) $\frac{i}{2}e^{-6it} - \frac{i}{2}e^{-4it} + ie^{-2it} - ie^{2it} + \frac{i}{2}e^{4it} - \frac{i}{2}e^{6it}$

( ) $\frac{i}{2}e^{-6it} + \frac{3i}{2}e^{-2it} - \frac{3i}{2}e^{2it} - \frac{i}{2}e^{6it}$

( ) nenhuma das anteriores

Questão 2. (1.0pt) Considere a função periódica $f(t) = \cos(2t) + \cos(3t) + \cos(4t)$. Marque na primeira coluna seu período fundamental e na segunda sua frequência angular fundamental.

( ) 1

( ) 2

( ) π

( ) 2π

( ) $\frac{\pi}{12}$

( ) nenhuma das anteriores

( ) 1

( ) 2

( ) π

( ) 2π

( ) $\frac{\pi}{12}$

( ) nenhuma das anteriores

Questão 3. (2.0pt) Considere $f(t) = e^{-t}u(t)$ e $g(t) = f(t) - f(-t)$, onde $u(\cdot)$ é a função degrau unitário. Assinale na primeira coluna a transformada de Fourier $\mathcal{F}(f)$, e na segunda $\mathcal{F}(g)$. Aqui $i^2 = -1$.

( ) $\frac{1}{1+w^2}$

( ) $\frac{1-iw}{1+w^2}$

( ) $\frac{2-2iw}{1+w^2}$

( ) $\frac{1+iw}{1+w^2}$

( ) $\frac{2+2iw}{1+w^2}$

( ) nenhuma das anteriores

( ) $\frac{2}{1+w^2}$

( ) $\frac{-2}{1+w^2}$

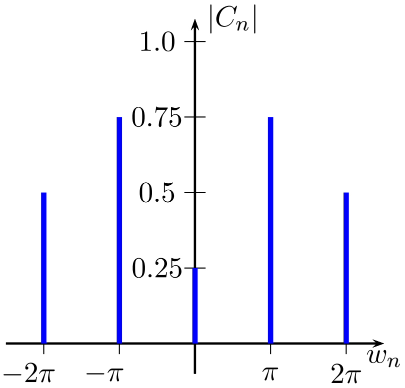
( ) $\frac{2iw}{1+w^2}$

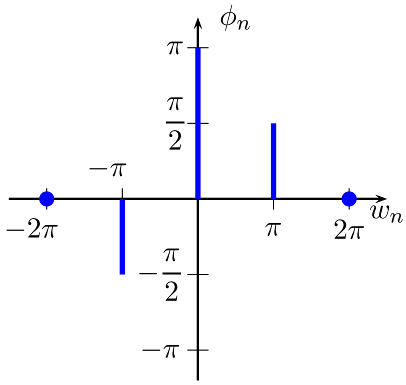
( ) $\frac{2-2iw}{1+w^2}$

( ) $\frac{-2iw}{1+w^2}$

( ) nenhuma das anteriores

Questão 4.(1.0pt) Considere os diagramas de espectro de módulo e de fase da série de Fourier de uma função $f(t)$ de período $T = 2$.





Marque, na primeira coluna, o valor de $\int_0^T f(t)dt$; na segunda, o valor de $\int_0^T |f(t)|^2 dt$.

( ) $-\frac{1}{4}$

( ) $-\frac{1}{2}$

( ) -1

( ) 2

( ) $\frac{1}{4}$

( ) nenhuma das anteriores

( ) $\frac{1}{4}$

( ) $\frac{1}{16}$

( ) $\frac{27}{16}$

( ) $\frac{27}{4}$

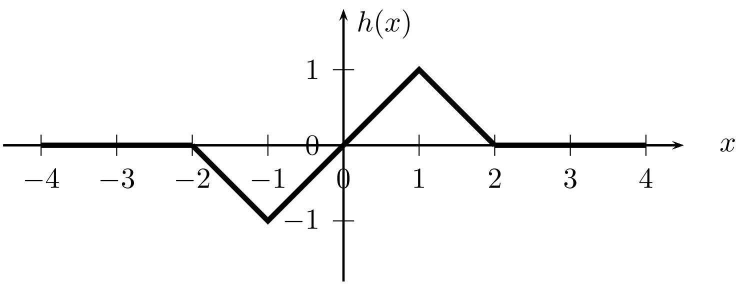
( ) $\frac{3}{4}$

( ) nenhuma das anteriores

Questões abertas (discursivas): entregue desenvolvimento em folhas avulsas, com seu nome.

Questão 5A.(1.0pt) Obtenha a expressão de $f(t)$ da Questão **4**. (deve conter apenas constante, senos e cossenos)

Questão 5B.(1.0pt) Obtenha a transformada de Fourier $H(\cdot)$ da função $h(x)$ definida abaixo.



Questão 6 Considere o problema

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = -u, \text{ para todos } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

6A.(0.8pt) Obtenha a transformada de Fourier $F(\cdot)$ de $f(x) = e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$

6B.(1.2pt) Encontre a solução $u(x,t)$ (e a respectiva transformada de Fourier $U(\cdot,t)$) do problema do enunciado para $f(x)$ conforme definida em **6A**.

Bom Trabalho.