UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2022/2
Prova da área IIB

1 - 4	5	6	Total

Nome: Gabarito ______________________________ **Cartão:** ______________

Questão 1.(2.0pt) Considerando a expansão em série de Fourier de $f(t) = 4\,\mathrm{sen}^3(2t)$, assinale na primeira coluna sua representação trigonométrica e na segunda sua representação exponencial. Aqui $i^2 = -1$.

( ) $\mathrm{sen}(2t) - \mathrm{sen}(6t)$

(X) $3\,\mathrm{sen}(2t) - \mathrm{sen}(6t)$

( ) $3\,\mathrm{sen}(2t) + \mathrm{sen}(6t)$

( ) $2\,\mathrm{sen}(2t) - \mathrm{sen}(4t) + \mathrm{sen}(6t)$

( ) $4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(nt)}{1+4/n}$

( ) nenhuma das anteriores

( ) $2i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n n e^{nit}}{n+4}$

(X) $-\frac{i}{2}e^{-6it} + \frac{3i}{2}e^{-2it} - \frac{3i}{2}e^{2it} + \frac{i}{2}e^{6it}$

( ) $-\frac{i}{2}e^{-6it} + \frac{i}{2}e^{-2it} - \frac{i}{2}e^{2it} + \frac{i}{2}e^{6it}$

( ) $\frac{i}{2}e^{-6it} - \frac{i}{2}e^{-4it} + ie^{-2it} - ie^{2it} + \frac{i}{2}e^{4it} - \frac{i}{2}e^{6it}$

( ) $\frac{i}{2}e^{-6it} + \frac{3i}{2}e^{-2it} - \frac{3i}{2}e^{2it} - \frac{i}{2}e^{6it}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: (a) usamos $\mathrm{sen}(2t) = \frac{1-\cos(4t)}{2}$ e $2\,\mathrm{sen}(x)\cos(y) = \mathrm{sen}(x+y) + \mathrm{sen}(x-y)$

$$f(t) = 2\,\mathrm{sen}(2t)2\,\mathrm{sen}^2(2t) = 2\,\mathrm{sen}(2t)(1-\cos(4t)) = 2\,\mathrm{sen}(2t) - 2\,\mathrm{sen}(2t)\cos(4t) =$$
$$2\,\mathrm{sen}(2t) - sin(2t+4t) - \mathrm{sen}(2t-4t) = 3\,\mathrm{sen}(2t) - \mathrm{sen}(6t)$$

(b) usamos $\mathrm{sen}(at) = \frac{e^{ait} - e^{-ait}}{2i}$ e a resposta da parte (a)

$$f(t) = 3\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} - \frac{e^{6it} - e^{-6it}}{2i} = -\frac{i}{2}e^{-6it} + \frac{3i}{2}e^{-2it} - \frac{3i}{2}e^{2it} + \frac{i}{2}e^{6it}$$

Questão 2. (1.0pt) Considere a função periódica $f(t) = \cos(2t) + \cos(3t) + \cos(4t)$. Marque na primeira coluna seu período fundamental e na segunda sua frequência angular fundamental.

( ) 1

( ) 2

( ) π

(X) 2π

( ) $\frac{\pi}{12}$

( ) nenhuma das anteriores

(X) 1

( ) 2

( ) π

( ) 2π

( ) $\frac{\pi}{12}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: os períodos dos harmônicos são π, $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{4}$ respectivamente. Como o período fundamental precisa ser o menor múltiplo comum desses 3 valores, temos $T = 2\pi$, e $w = \frac{2\pi}{T} = 1$.

Questão 3. (2.0pt) Considere $f(t) = e^{-t}u(t)$ e $g(t) = f(t) - f(-t)$, onde $u(\cdot)$ é a função degrau unitário. Assinale na primeira coluna a transformada de Fourier $\mathcal{F}(f)$, e na segunda $\mathcal{F}(g)$. Aqui $i^2 = -1$.

( ) $\dfrac{1}{1+w^2}$

(X) $\dfrac{1-iw}{1+w^2}$

( ) $\dfrac{2-2iw}{1+w^2}$

( ) $\dfrac{1+iw}{1+w^2}$

( ) $\dfrac{2+2iw}{1+w^2}$

( ) nenhuma das anteriores

( ) $\dfrac{2}{1+w^2}$

( ) $\dfrac{-2}{1+w^2}$

( ) $\dfrac{2iw}{1+w^2}$

( ) $\dfrac{2-2iw}{1+w^2}$

(X) $\dfrac{-2iw}{1+w^2}$

( ) nenhuma das anteriores

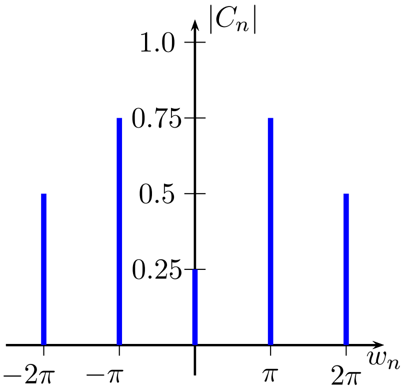
Solução: (a)

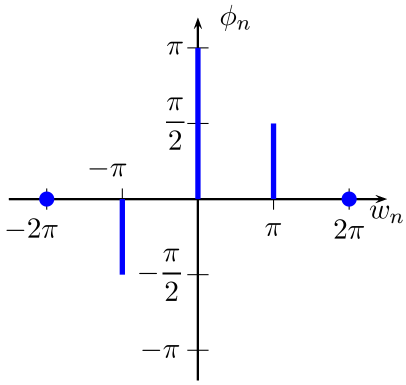
$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t)e^{-iwt}dt = \int_0^{\infty} e^{-t}(\cos(wt) - i\operatorname{sen}(wt))dt = \frac{1}{1+w^2} - i\frac{w}{1+w^2} = \frac{1-iw}{1+w^2}$$

(b) $g(-t) = f(-t) - f(t) = -g(t)$ implica que g é impar, portanto

$$\mathcal{F}(g) = -2i\int_0^{\infty} g(t)\operatorname{sen}(wt)dt = -2i\int_0^{\infty} e^{-t}\operatorname{sen}(wt)dt = -2i\frac{1}{w}1+w^2 = -\frac{2iw}{1+w^2}$$

Questão 4.(1.0pt) Considere os diagramas de espectro de módulo e de fase da série de Fourier de uma função $f(t)$ de período $T = 2$.





Marque, na primeira coluna, o valor de $\displaystyle\int_0^T f(t)dt$; na segunda, o valor de $\displaystyle\int_0^T |f(t)|^2dt$.

( ) $-\dfrac{1}{4}$

(X) $-\dfrac{1}{2}$

( ) -1

( ) 2

( ) $\dfrac{1}{4}$

( ) nenhuma das anteriores

( ) $\dfrac{1}{4}$

( ) $\dfrac{1}{16}$

( ) $\dfrac{27}{16}$

( ) $\dfrac{27}{4}$

( ) $\dfrac{3}{4}$

(X) nenhuma das anteriores

Solução: (a) O diagrama fornece $C_0 = \dfrac{1}{4}e^{\pi i} = -\dfrac{1}{4}$, o que implica (usando $T = 2$)

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = C_0 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \int_0^T f(t)dt = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

(b) o diagrama também fornece $C_{-2} = \dfrac{1}{2}e^{0i} = \dfrac{1}{2}$, $C_{-1} = \dfrac{3}{4}e^{-\frac{\pi i}{2}} = -\dfrac{3i}{4}$, $C_1 = \dfrac{3}{4}e^{\frac{\pi i}{2}} = \dfrac{3i}{4}$, $C_2 = \dfrac{1}{2}e^{0i} = \dfrac{1}{2}$ e pelo Teorema de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = |C_{-2}|^2 + |C_{-1}|^2 + |C_0|^2 + |C_1|^2 + |C_2|^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + \frac{1}{16} + \frac{9}{16} + \frac{1}{4} = \frac{27}{16}$$

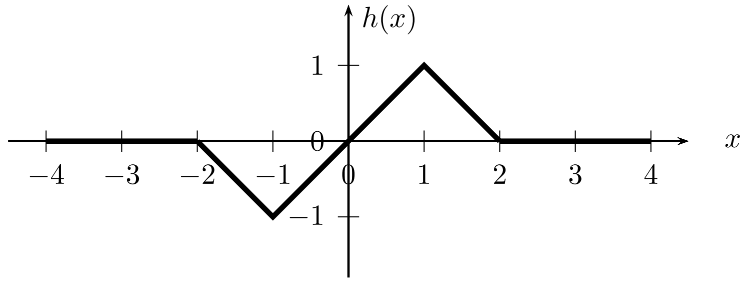
que implica $\displaystyle\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{2(27)}{16} = \frac{27}{8}$.

Questão 5A.(1.0pt) Obtenha a expressão de $f(t)$ da Questão **4**. (deve conter apenas constante, senos e cossenos)

Solução:

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-2\pi i t} - \frac{3i}{4}e^{-\pi i t} - \frac{1}{4} + \frac{3i}{4}e^{\pi i t} + \frac{1}{2}e^{2\pi i t} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(e^{-2\pi i t} + e^{2\pi i t}\right) + \frac{3i}{4}\left(e^{\pi i t} - e^{-\pi i t}\right) =$$
$$-\frac{1}{4} + \cos(2\pi t) + \frac{3i}{4}2i\,\mathrm{sen}(\pi t) = -\frac{1}{4} + \cos(2\pi t) - \frac{3\,\mathrm{sen}(\pi t)}{2}$$

Questão 5B.(1.0pt) Obtenha a transformada de Fourier $H(\cdot)$ da função $h(x)$ definida abaixo.



Solução: prestando atenção que a função derivada $h'(x)$ é constante por trechos:

$$h'(x) = \begin{cases} 0 & ,x < -2 \\ -1 & ,-2 < x < -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ -1 & ,1 < x < 2 \\ 0 & ,x > 2 \end{cases}$$

e além disso h' é uma função par, e segue

$$\mathcal{F}(h') = 2\int_0^\infty h'(x)\cos(kx)dx = 2\left(\int_0^1 \cos(kx)dx - \int_1^2 \cos(kx)dx\right) = 2\left[\frac{\mathrm{sen}(kx)}{k}\right]_0^1 - 2\left[\frac{\mathrm{sen}(kx)}{k}\right]_1^2 =$$
$$2\frac{\mathrm{sen}(k)}{k} - 2\frac{\mathrm{sen}(2k)}{k} + 2\frac{\mathrm{sen}(k)}{k} = \frac{4\,\mathrm{sen}(k) - 2\,\mathrm{sen}(2k)}{k}$$

mas lembramos $\mathcal{F}(h') = ikH(k)$ e portanto $H(k) = \dfrac{1}{ik}\dfrac{4\,\mathrm{sen}(k) - 2\,\mathrm{sen}(2k)}{k} = \dfrac{4\,\mathrm{sen}(k) - 2\,\mathrm{sen}(2k)}{ik^2}$

Questão 6 Considere o problema

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = -u, \text{ para todos } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

6A.(0.8pt) Obtenha a transformada de Fourier $F(\cdot)$ de $f(x) = e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$

6B.(1.2pt) Encontre a solução $u(x,t)$ (e a respectiva transformada de Fourier $U(\cdot,t)$) do problema do enunciado para $f(x)$ conforme definida em **6A**.

Solução: (*) como consequência da paridade de $e^{-|x|}$

$$\text{(A) } F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-iwx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}(\cos(wx) - i\,\mathrm{sen}(wx))dx \overset{*}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\cos(wx)dx \overset{*}{=}$$
$$2\int_0^\infty e^{-x}\cos(wx)dx$$

e assim $F(w) = 2\dfrac{1}{1+w^2} = \dfrac{2}{1+w^2}$.

(B) Aplicando a transformada de Fourier na variável x

$$U_t + 2iwU = -U \Rightarrow U_t = (-1 - 2iw)U \Rightarrow U(w,t) = U(w,0)e^{-(1+2iw)t}$$

onde $U(w,0) = \mathcal{F}(f(x))$ foi obtido no subítem (A) desta questão.

Assim temos $U(w,t) = e^{-t}F(w)e^{-2iwt}$, o que implica

$$u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{-t}F(w)e^{-2iwt}\right] = e^{-t}\mathcal{F}_x^{-1}\left[F(w)e^{-2iwt}\right] = e^{-t}f(x-2t) = e^{-t}e^{-|x-2t|}$$

□