UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2022/2
Prova da área IIB

1 - 5	6	7	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} = \frac{1}{2}F(w - w_0) + \frac{1}{2}F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(w_nt) + b_n\,\mathrm{sen}(w_nt)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_nt)dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_ne^{iw_nt}$, onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(w)\cos(wt) + B(w)\,\mathrm{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$, onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma} \qquad (a\geq 0,\ m>0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\int_0^\infty xe^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$
11. $\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\operatorname{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(ax)\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	22. $\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$
$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\int x^2\cos(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\cos(\lambda x)+(\lambda^2x^2-2)\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^3}+C$
$\int x^2\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)+(2-\lambda^2x^2)\cos(\lambda x)}{\lambda^3}+C$

• **Questão 1** (2.0 pontos) Considere a função dada por:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int}.$$

Sabendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, responda:

Período fundamental
( ) $T_f = 1$
( ) $T_f = \pi/2$
( ) $T_f = \pi$
(X) $T_f = 2\pi$
( ) N.D.A

Módulo de C_2
( ) $|C_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}$
( ) $|C_2| = \frac{1}{4}$
( ) $|C_2| = \frac{1}{2}$
(X) $|C_2| = \frac{1}{8}$
( ) $|C_2| = 1$

Valor médio $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$
(X) 0
( ) 1/2
( ) 1
( ) 3/2
( ) 2

Potência Média $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$
(X) $\bar{P}_f = \frac{\pi^4}{180}$
( ) $\bar{P}_f = \frac{\pi^4}{90}$
( ) $\bar{P}_f = \frac{\pi^2}{6}$
( ) $\bar{P}_f = \frac{\pi^2}{12}$
( ) N.D.A

Solução: Como a frequência angular fundamental é 1, o período fundamental é $T_f = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$. Também, como $a_2 = \frac{1}{4}$ e $b_2 = 0$, temos $C_2 = \frac{a_2 - ib_2}{2} = \frac{1}{8}$. Assim, $|C_2| = \frac{1}{8}$.

O valor médio é dado por

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = 0.$$

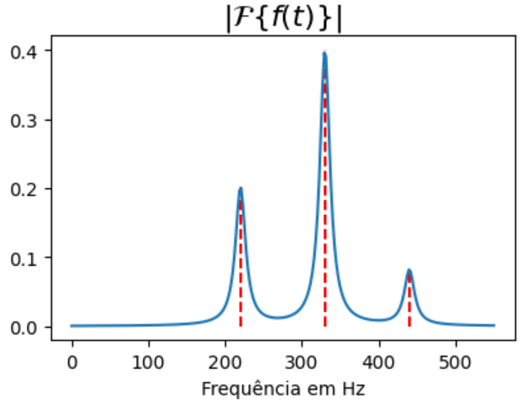
Para calcular a potência média, usamos o teorema de Parseval:

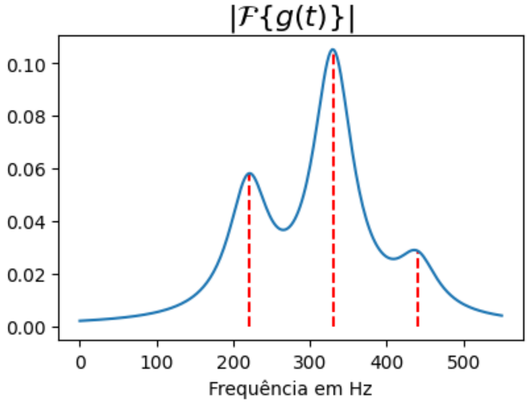
$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

Usando que $C_0 = 0$ e $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2n^2}$, temos $|C_n| = \frac{1}{2n^2}$ e $|C_n|^2 = \frac{1}{4n^4}$. Portanto,

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = |C_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^4} = \frac{1}{2}\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{180}.$$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere os diagramas de espectro de magnititudes das funções $f(t)$ e $g(t)$ dados abaixo:





Sabendo que $f(t)$ e $g(t)$ representam silvos de um instrumento de sofro produzindo a **nota lá**, assinale as alternativas que são compatíveis com os diagramas dados:

Frquência fundamental
( ) 55 Hz
(X) 110 Hz
( ) 220 Hz
( ) 330 Hz
( ) 440 Hz

(X) A duração do primeiro silvo é quatro vezes a duração do segundo silvo e tem a mesma amplitude.
( ) A duração do segundo silvo é quatro vezes a duração do primeiro silvo e tem a mesma amplitude.
( ) A duração do primeiro silvo é quatro vezes a duração do segundo silvo e tem quatro vezes a amplitude.
( ) A duração do segundo silvo é quatro vezes a duração do primeiro silvo e tem um quarto da amplitude.

Solução: Olhando a tabela de notas lá, observamos que as frequências possíveis, em Hertz, são 55, 110, 220, 440 e 880. No gráfico, aparecem as seguintes frequências: 220, 330 e 440. A maior frequência que divide as três primeiras é 110Hz.

Observe que a primeiro Silvo é da forma $f(t) = f_1(t)f_2(t)$, onde f_1 é periódica e f_2 é uma função que dá a duração do Silvo, por exemplo, f_2 pode ser a seguinte função:

$$f_2(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a \\ 0, & |t| > a. \end{cases}$$

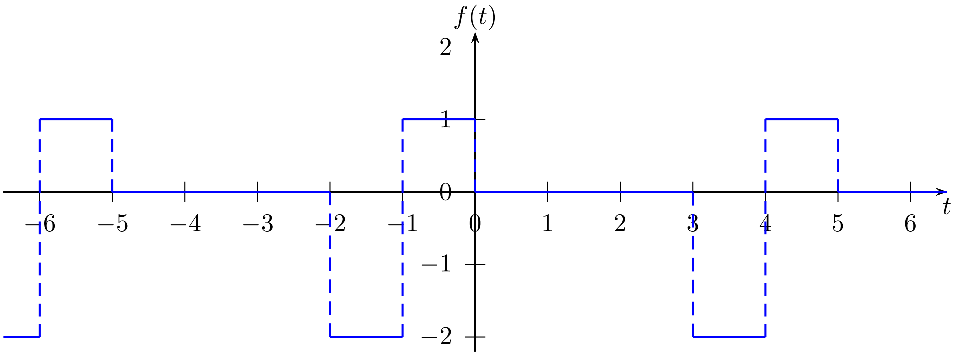
Aqui, $2a$ é a duração do primeiro Silvo. Observe que as frequências dos dois silvos são as mesmas, mudando apenas a função que dá a duração do Silvo. É compatível dizer que $g(t) = f_1(t)f_2(bt)$. Temos, pelo teorema da Convolução e da propriedade de mudança de escala as seguintes expressões:

$$F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}F_1(w) * F_2(w)$$

$$G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t)f_2(bt)\} = \frac{1}{2\pi}F_1(w) * \mathcal{F}\{f_2(bt)\} = \frac{1}{2\pi b}F_1(w) * F_2\left(\frac{w}{b}\right).$$

Quando olhamos os dois gráficos, observamos que $b = 4$, pois o segundo Silvo é quatro vezes mais baixo que o primeiro. Assim, $g(t) = f_1(t)f_2(4t)$, fazendo o primeiro Silvo ser quatro vezes mais rápido, porém com a mesma amplitude.

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere a função periódica dada pelo gráfico abaixo:



É correto afirmar que

( ) A função é ímpar de frequência angular fundamental $\frac{2\pi}{5}$

( ) A função é par de frequência angular fundamental $\frac{2\pi}{3}$

( ) A função não é par nem ímpar e a frequência angular fundamental $\frac{2\pi}{3}$

(X) A função não é par nem ímpar e a frequência angular fundamental $\frac{2\pi}{5}$

( ) A função não é par nem ímpar e a frequência angular fundamental $\frac{2\pi}{4}$

( ) A função é ímpar de frequência angular fundamental $\frac{2\pi}{3}$

(X) $a_0 = -\frac{2}{5}$

( ) $a_0 = -\frac{2}{3}$

( ) $a_0 = 0$

( ) $a_0 = \frac{2}{3}$

( ) $a_0 = \frac{2}{5}$

Solução: Período 5, frequência angular fundamental $\frac{2\pi}{5}$.

$$a_0 = \frac{2}{5}\int_0^5 f(t)dt = \frac{2}{5}(-2+1) = -\frac{2}{5}$$

• **Questão 4** (1.0 pontos) Considere as funções dadas por:

$$\begin{aligned} f(t) &= te^{-2|t|} \\ g(t) &= t\cos(3t)e^{-2|t|} \end{aligned}$$

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ e $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$.

$F(w)$

( ) $\frac{-8w}{(w^2+4)^2}$

( ) $\frac{8iw}{(w^2+4)^2}$

( ) $\frac{-8w}{(w^2+4)^2}$

(X) $\frac{-8iw}{(w^2+4)^2}$

( ) N.D.A

$G(w)$

( ) $-\frac{4(w+3)}{((w+3)^2+4)^2} - \frac{4(w-3)}{((w-3)^2+4)^2}$

( ) $-\frac{4i(w+3)}{(w+3)^2+4} - \frac{4i(w-3)}{(w-3)^2+4}$

( ) $\frac{4(w+3)}{((w+3)^2+4)^2} + \frac{4(w-3)}{((w-3)^2+4)^2}$

( ) $\frac{4i(w+3)}{(w+3)^2+4} + \frac{4i(w-3)}{(w-3)^2+4}$

(X) N.D.A

Solução:

$$\begin{aligned}
F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} te^{-2|t|}e^{-iwt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} te^{-2|t|}\cos(wt)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} te^{-2|t|}\operatorname{sen}(wt)dt \\
&= -2i\int_{0}^{\infty} te^{-2|t|}\operatorname{sen}(wt)dt,
\end{aligned}$$

onde usamos que $\operatorname{sen}(wt)$ e t são funções ímpares e $\cos(wt)$ e $e^{-2|t|}$ são pares. Assim, usando o item 9 da tabela com $a = 2$ e $m = w$, temos:

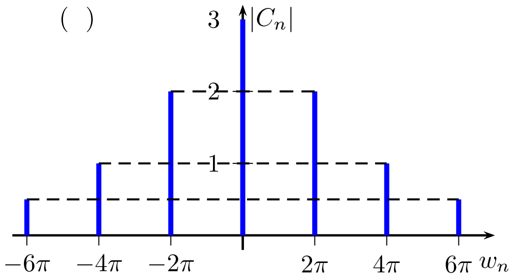
$$F(w) = -\frac{8iw}{(4+w^2)^2}.$$

Usando a propriedade da Convolução, temos:

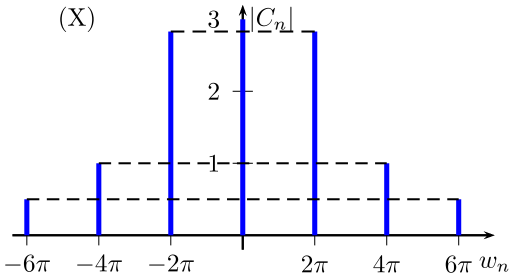
$$G(w) = -\frac{4i(w-3)}{(4+(w-3)^2)^2} - \frac{4i(w+3)}{(4+(w+3)^2)^2}.$$

• **Questão 5** (1.0 pontos) Assinale as alternativas que melhor representam os diagramas de espectro de amplitude e fase da função $f(t) = 3 + 4\cos(2\pi t) - 4\,\mathrm{sen}(2\pi t) - 2\cos(4\pi t) + \mathrm{sen}(6\pi t)$ (amplitude na primeira coluna e fase na segunda).

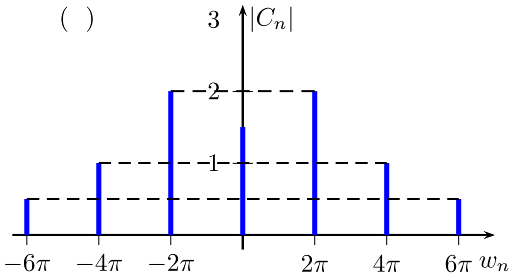
( )



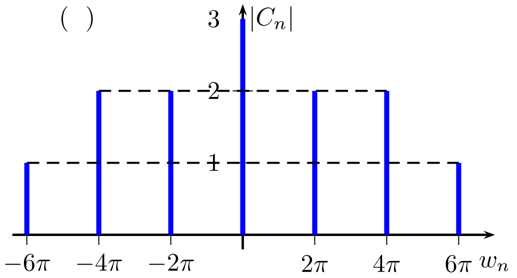
(X)



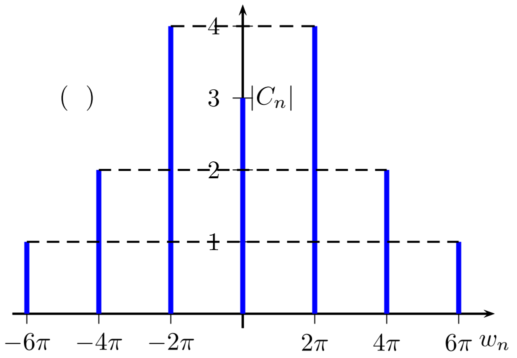
( )



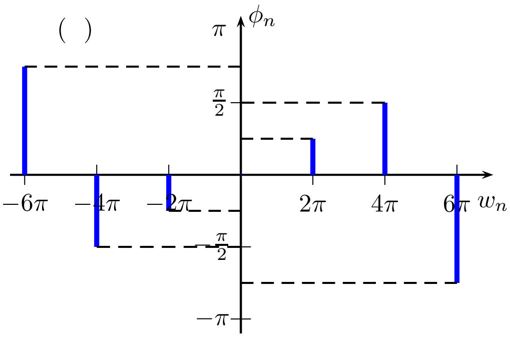
( )



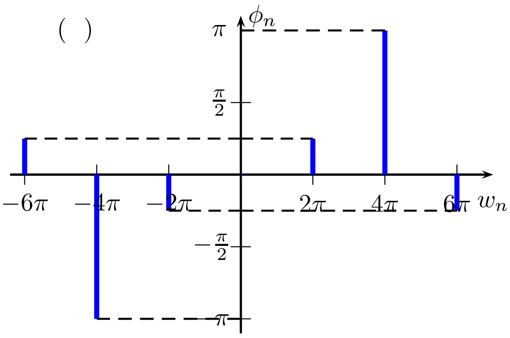
( )



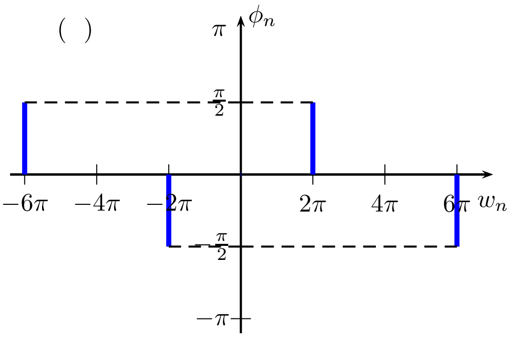
( )



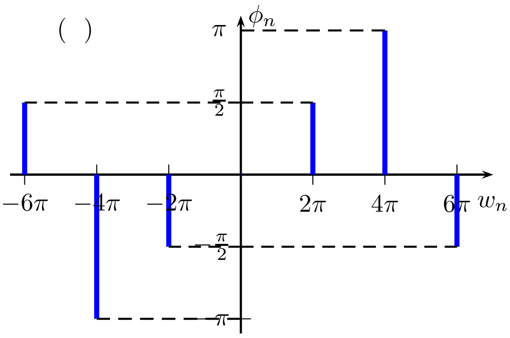
( )



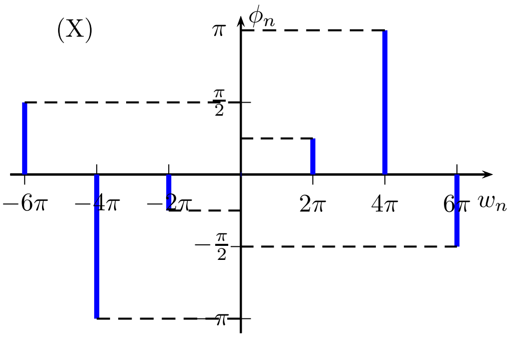
( )



( )



(X)



Solução: Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= 3\\
a_1 &= 4\\
b_1 &= -4\\
a_2 &= -2\\
b_2 &= 0\\
a_3 &= 0\\
b_3 &= 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
C_0 &= 3\\
C_1 &= \frac{a_1 - ib_1}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}\\
C_2 &= \frac{a_2 - ib_2}{2} = -1 = e^{i\pi}\\
C_3 &= -\frac{i}{2} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/2}
\end{aligned}$$

• **Questão 6** (2.0 pontos) Um fluido se desloca em um tubo termicamente isolado com velocidade constante v de forma que a evolução da temperatura $u(x,t)$ como uma função da coordenada x e do tempo é descrita pelo seguinte modelo simplificado:

$$u_t - vu_x - u_{xx} = 0.$$

Sabendo que no instante $t = 0$, a temperatura foi bruscamente aquecida em uma região muito pequena, de forma que podemos considerar

$$u(x,0) = 500\delta(x).$$

Use a técnica das transformadas de Fourier para obter a solução desta equação diferencial quando $v = 2m/s$.

Solução: Aplicamos a transformada de Fourier na equação para obter

$$U_t - vikU + k^2U = 0,$$

onde usamos $\mathcal{F}\{u\} = U(k,t)$, $\mathcal{F}\{u_x\} = ikU(k,t)$ e $\mathcal{F}\{u_{xx}\} = -k^2U(k,t)$. A tranformada de Fourier da condição inicial toma a forma

$$U(k,0) = 500,$$

onde usamos a propriedade da filtragem para integrar a função delta de Dirac, isto é,

$$\mathcal{F}\{\delta(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-kx}dx = 1.$$

Por separação de variáveis, temos

$$\frac{U_t}{U} = vik - k^2.$$

Integramos para obter

$$\ln|U| = (vik - k^2)t + C,$$

ou seja,

$$U = e^{(vik-k^2)t}M,$$

onde $M = e^C$ é uma constante. Como a condição inicial nos dá $U(k,0) = 500$ e, pela última expressão $U(k,0) = M$, concluímos que $M = 500$. Logo,

$$U(k,t) = 500e^{(vik-k^2)t}.$$

A solução é dada por

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{500e^{(vik-k^2)t}\} = 500\mathcal{F}^{-1}\{e^{vikt}e^{-k^2t}\}.$$

Primeiro, vamos calcular $\mathcal{F}^{-1}\{e^{-k^2t}\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{e^{-k^2t}\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t}e^{ikx}dk\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t}\cos(kx)dk + i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t}\operatorname{sen}(kx)dk\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-k^2t}\cos(kx)dk,
\end{aligned}$$

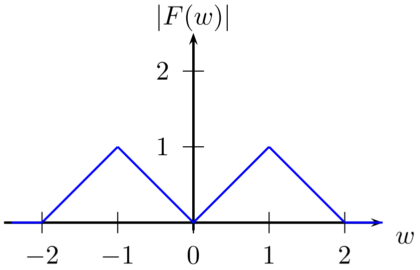
onde usamos as propriedades de paridade das funções envolvidas. Assim, pelo item 8 da tabela com $a^2 = t$ e $x = m$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{e^{-k^2t}\} &= \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}e^{-x^2/4t}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando a propriedade do deslocamento, temos:

$$u(x,t) = \frac{250}{\sqrt{\pi t}}e^{-(x+vt)^2/4t}.$$

• **Questão 7** (2.0 pontos) Sejam $f(t)$ uma função cuja transformada de Fourier é dada por $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. O gráfico abaixo apresenta o diagrama de espectro de magnitudes de $F(w)$.



Esboce a diagrama de espectro de magnititudes da transformada de Fourier da função $g(t) = f'(t)\cos(3t)$

Solução: Seja $h(t) = f'(t)$, então $H(w) = iwF(w)$. Também, $G(w) = \frac{1}{2}\left(H(w+3) + H(w-3)\right)$. Primeiro vamos fazer o gráfico intermediário de $|H(w)| = |w||F(w)|$, depois o gráfico pedido de $|G(w)| = \frac{1}{2}\left(|H(w+3)| + |H(w-3)|\right)$.