UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2023/1
Prova da área IIB

1 - 3	**4**	**5**	**Total**

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2}F(w - w_0) + \frac{1}{2}F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\|a\|}F\left(\frac{w}{a}\right), \quad a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|F(w)\|^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \|f(t)\|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|C_n\|^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(w_n t) + b_n\,\text{sen}(w_n t)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt,$ $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_n t)dt,$ $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\text{sen}(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\text{sen}(w_n t)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t},$ onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(w)\cos(wt) + B(w)\,\text{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw,$ onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Integrais definidas

1. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-\lvert m\rvert a} \qquad (a>0)$	4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-\lvert m\rvert a}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}e^{-\lvert m\rvert a}, & m<0 \end{cases}$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$
11. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\operatorname{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $\displaystyle erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(ax)\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\leq m) \end{cases}$
17. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$
19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$
21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	22. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Identidades Trigonométricas:

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}$$

Integrais:

$$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$$

$$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$$

$$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$$

$$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$$

$$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$$

$$\int x^2\cos(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\cos(\lambda x)+(\lambda^2x^2-2)\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^3}+C$$

$$\int x^2\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)+(2-\lambda^2x^2)\cos(\lambda x)}{\lambda^3}+C$$

• **Questão 1** (0.5 ponto por item - total de 3.0 pontos) Considere as seguintes duas funções que modelam duas ondas sonoras:

$$f(t) = 2 + 3\cos(440\pi t) + 3\,\text{sen}(440\pi t) + 2\cos(660\pi t) - 2\,\text{sen}(660\pi t) - \cos(880\pi t) + \text{sen}(1100\pi t)$$

e

$$g(t) = 2 + \cos(220\pi t) + \text{sen}(220\pi t) - 3\cos(440\pi t) - 3\,\text{sen}(440\pi t) - \cos(660\pi t) + \cos(880\pi t)$$

Marque a resposta correta para cada item.

Quais são as notas musicais que representam os sinais $f(t)$ e $g(t)$, respectivamente?

( ) Lá da escala 3 e Lá da escala 2
( ) Lá da escala 4 e Lá da escala 3
( ) Lá da escala 5 e Lá da escala 4
( ) Lá da escala 3 e Lá da escala 3
(X) Lá da escala 2 e Lá da escala 2

O som produzido pelo sinal $f(2t) + g(3t)$ representa:

(X) Uma única nota - Lá da escala 2
( ) Uma única nota - Lá da escala 3
( ) Uma única nota - Lá da escala 4
( ) Uma única nota - Mi da escala 3
( ) Duas notas - Lá da escala 2 e Mi da escala 3.

Escrevendo $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}$, temos:

( ) $w_1 = 110$, $C_1 = 0$ e $C_2 = 2 + i$.
( ) $w_1 = 220$, $C_1 = 0$ e $C_2 = \frac{3-3i}{2}$.
( ) $w_1 = 440\pi$, $C_1 = 0$ e $C_1 = \frac{3-3i}{2}$.
(X) $w_1 = 220\pi$, $C_1 = 0$ e $C_2 = \frac{3-3i}{2}$.
( ) $w_1 = 220\pi$, $C_1 = \frac{3-3i}{2}$ e $C_2 = 1 + i$.

Escrevendo $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{iw_n t}$, $D_n = |D_n|e^{i\phi_n}$, temos:

( ) $w_1 = 110$, $|D_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\phi_1 = \frac{\pi}{4}$.
( ) $w_1 = 110$, $|D_1| = \frac{1}{2}$ e $\phi_1 = -\frac{\pi}{4}$.
(X) $w_1 = 220\pi$, $|D_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\phi_1 = -\frac{\pi}{4}$.
( ) $w_1 = 220\pi$, $|D_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$.
( ) $w_1 = 220\pi$, $|D_1| = 1$ e $\phi_1 = -\frac{\pi}{2}$.

O valor médio do sinal $f(t)$ dado por $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ é:

( ) 0.
( ) 1.
(X) 2.
( ) 4.
( ) 8.

Potência média do sinal $g(t)$ dada por $\frac{1}{T}\int_0^T |g(t)|^2 dt$ é:

( ) 3
( ) 5
( ) 8
( ) 12
(X) 15

Solução: A frequência angular fundametal de $f(t)$ é 220π e a frequência angular fundamental de $g(t)$ é 220π. Em ambas funções, todas as frequências são múltiplas de 220π rad/s. Como 220 rad/s é igual 110 Hz, ambas as notas são Lá na escala 2.

Pela propriedade da mudança de escala, sabemos que $f(2t)$ produz uma nota com o dobro da frequência de $f(t)$, ou seja, 220 Hz (Lá da escala 3) e $g(3t)$ produz uma nota com o triplo da frequência de $g(t)$, ou seja, 330 Hz (quase um Mi da Escala 4 - 329,6 Hz). Observe que, 110 Hz é uma frequência fundamental para a soma das duas notas, pois 330 e 220 ambas múltiplos de 110.

Para $f(t)$, temos $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $a_2 = 3$ e $b_2 = 3$. Assim,

$$C_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad C_2 = \frac{a_2 - ib_2}{2} = \frac{3-3i}{2}$$

Para $g(t)$, temos $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, ou seja, $D_1 = \frac{1-i}{2}$. Assim, $|D_1| = \sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\phi_1 = -\frac{\pi}{4}$

O valor médio é o coefiente $\frac{a_0}{2} = 2$

A potência média pode ser calculada pelo teorema de Parseval. Para isso, listemos todos coefientes de $g(t)$: $a_0 = 4$, $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $a_2 = -3$, $b_2 = -3$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$. Assim, $D_0 = 2$, $D_1 = \frac{1-i}{2}$, $D_2 = \frac{-3+3i}{2}$, $D_3 = -\frac{1}{2}$ e $D_4 = \frac{1}{2}$. Assim, $|D_0| = 2$, $|D_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|D_2| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $|D_3| = \frac{1}{2}$ e $|D_4| = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\frac{1}{T}\int_0^T |g(t)|^2 dt = |D_0|^2 + 2(|D_1|^2 + |D_2|^2 + |D_3|^2 + |D_4|^2) = 4 + 2(\frac{2}{4} + \frac{18}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 15$$

• **Questão 2** (0.5 ponto por item - total de 1.0 ponto) Seja $f(t) = e^{-t^2}$, $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w-10) + 2F(w) + F(w+10)\}$ e $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{-w^2 F(w)\}$

Marque a resposta correta para cada item.

$g(t)$

( ) $g(t) = 2e^{-t^2}\cos(10t)$
( ) $g(t) = 4e^{-t^2}\cos(10t)$
( ) $g(t) = 2e^{-t^2}\cos(5t)$
( ) $g(t) = 2e^{-t^2}\cos^2(10t)$
(X) $g(t) = 4e^{-t^2}\cos^2(5t)$

$h(t)$

( ) $h(t) = 2ie^{-t^2}(2t^2 - 1)$.
(X) $h(t) = 2e^{-t^2}(2t^2 - 1)$
( ) $h(t) = -2te^{-t^2}$.
( ) $h(t) = 2tie^{-t^2}$.
( ) $h(t) = t^2 e^{-t^2}$.

Solução: Pela propriedade da modulação, temos que $\mathcal{F}\{f(t)\cos(5t)\} = (F(w+5) + F(w-5))/2$. Quando aplicamos a mesma propriedade pela segunda vez, obtemos:

$$\mathcal{F}\{f(t)\cos^2(5t)\} = \frac{(F(w+5+5) + F(w+5-5))/2 + (F(w-5+5) + F(w-5-5))/2}{2} = \frac{F(w+10) + 2F(w) + F(w-10)}{4}$$

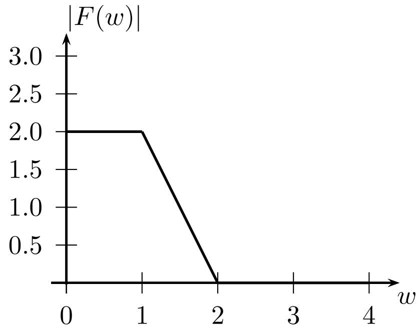
Dado que $f(t) = e^{-t^2}$, temos:

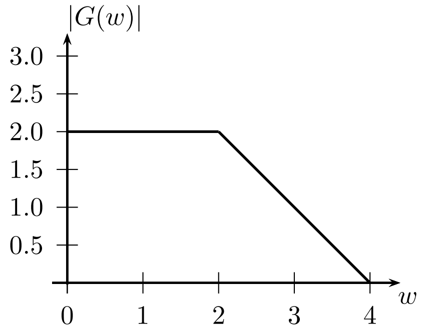
$$\mathcal{F}\{4e^{-t^2}\cos^2(5t)\} = F(w+10) + 2F(w) + F(w-10)$$

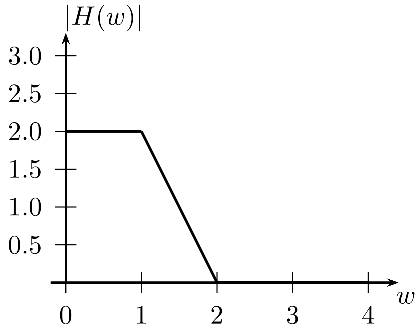
Pela propriedade da transformada da derivada, temos $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iwF(w)$. Aplicando novamente a mesma propriedade novamente, $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2F(w)$. Logo,

$$h(t) = f''(t) = (-2te^{-t^2})' = 4t^2e^{-t^2} - 2e^{-t^2} = (4t^2-2)e^{-t^2}$$

• **Questão 3** (0.5 ponto por item - total de 1.0 pontos) Considere três funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ e suas respesctivas transformadas de Fourier $F(w)$, $G(w)$ e $H(w)$. Abaixo estão apresentados os diagramas de espectro de magnitudes das três funções.







Assinale em cada coluna o item que é compatível com os gráficos.

( ) $g(t) = f(2t)$

( ) $g(t) = \frac{1}{2}f(2t)$

( ) $f(t) = g\left(\frac{t}{2}\right)$

( ) $h(t) = 2f\left(\frac{t}{2}\right)$

(X) $f(t) = \frac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)$

( ) $f(t) = 2(g * h)(t)$

( ) $g(t) = (f * h)(t)$

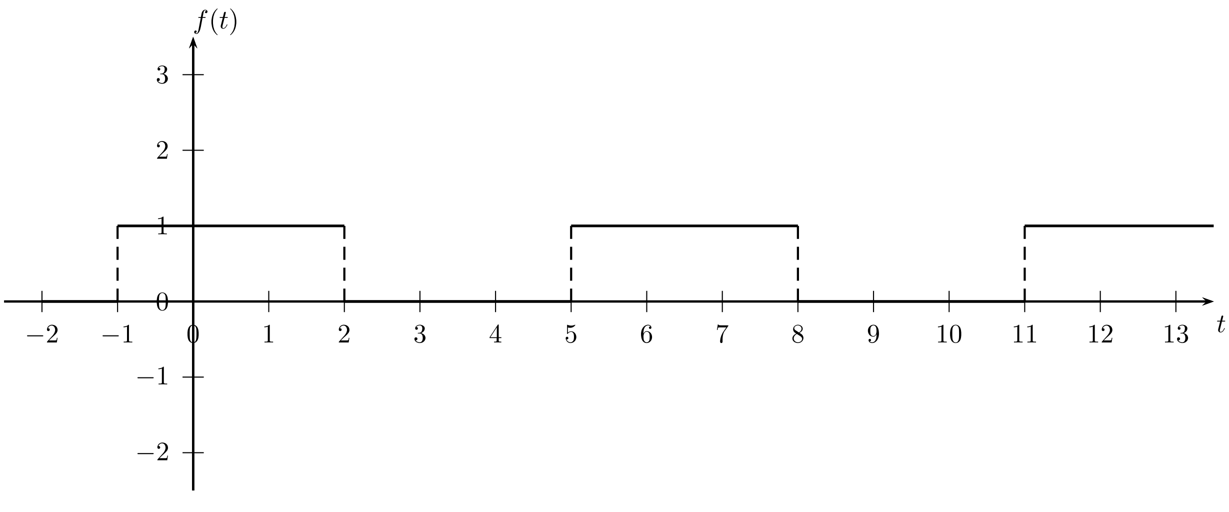
( ) $h(t) = 2(f * g)(t)$

(X) $f(t) = \frac{1}{2}(h * g)(t)$

( ) $h(t) = (f * g)(t)$

Solução: Observemos que, pela propriedade da mudança de escala, $g(t) = 2f(2t)$ ou, $f(t) = \frac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)$. Também, pela propriedade da convolução, temos $|\mathcal{F}\{(h * g)(t)\}| = |H(w)||G(w)|$. Como $|F(w)| = \frac{1}{2}|H(w)||G(w)|$, então $f(t) = \frac{1}{2}(h * g)(t)$.

• **Questão 4** (2.5 pontos) Considere a função periódica $f(t)$ dada no gráfico



e sua série de Fourier dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(w_nt) + b_b\,\text{sen}(w_nt).$$

a) (0.5 ponto) Calcule o período fundamental e a frequência fundamental.

b) (1.0 ponto) Calcule os coeficientes a_0 e a_n e b_n, $n \geq 1$.

c) (0.5 ponto) Simplifique as expressões dos coeficientes a_n e b_n com $n \in \{1,2,3\}$.

d) (0.5 ponto) Calcule C_n com $n \in \{1,2,3\}$ e escreva a forma exponencial $C_n = |C_n|e^{i\phi_n}$

Solução: a) O período fundamental é $T = 6$ e a frequência angular fundamental é $w = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

b)

$$a_0 = \frac{2}{6}\int_{-1}^{5} f(t)dt = 1$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{6}\int_{-1}^{5} f(t)\cos((\pi n/3)t)dt \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} \cos((\pi n/3)t)dt \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{\text{sen}((\pi n/3)t)}{\pi n/3}\right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{\text{sen}(2\pi n/3) - \text{sen}(-\pi n/3)}{\pi n} \\
&= \frac{\text{sen}(2\pi n/3) + \text{sen}(\pi n/3)}{\pi n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{6}\int_{-1}^{5} f(t)\,\text{sen}((\pi n/3)t)dt \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} \text{sen}((\pi n/3)t)dt \\
&= \frac{1}{3}\left[-\frac{\cos((\pi n/3)t)}{\pi n/3}\right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{-\cos(2\pi n/3) - (-\cos(-\pi n/3))}{\pi n} \\
&= \frac{-\cos(2\pi n/3) + \cos(\pi n/3)}{\pi n}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\text{sen}(2\pi/3) + \text{sen}(\pi/3)}{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \\
a_2 &= \frac{\text{sen}(4\pi/3) + \text{sen}(2\pi/3)}{2\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0 \\
a_3 &= \frac{\text{sen}(6\pi/3) + \text{sen}(3\pi/3)}{3\pi} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{-\cos(2\pi/3) + \cos(\pi/3)}{\pi} = -\left(-\frac{1}{2\pi}\right) + \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \\
b_2 &= \frac{-\cos(4\pi/3) + \cos(2\pi/3)}{2\pi} = -\left(-\frac{1}{4\pi}\right) - \frac{1}{4\pi} = 0 \\
b_3 &= \frac{-\cos(6\pi/3) + \cos(3\pi/3)}{3\pi} = -\frac{1}{3\pi} - \frac{1}{3\pi} = -\frac{2}{3\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= a_1 - ib_1 = \frac{\sqrt{3} - i}{2\pi} = \frac{1}{\pi}e^{-i\pi/6} \\
C_2 &= a_2 - ib_2 = 0 \\
C_3 &= a_3 - ib_3 = \frac{i}{3\pi} = \frac{1}{3\pi}e^{i\pi/2}
\end{aligned}$$

- **Questão 5** (2.5 pontos) Considere a funçao $f(t)$ dada abaixo.

$$f(t) = \frac{2}{\pi(4+t^2)}$$

a) (1.5 ponto) Calcule, a partir da definição, a transformada de Fourier da função $f(t)$.

b) (1.0 ponto) Esboce o diagrama de magnitudes de $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ e de $G(w) = \mathcal{F}\{f(t)\cos(5t)\}$.

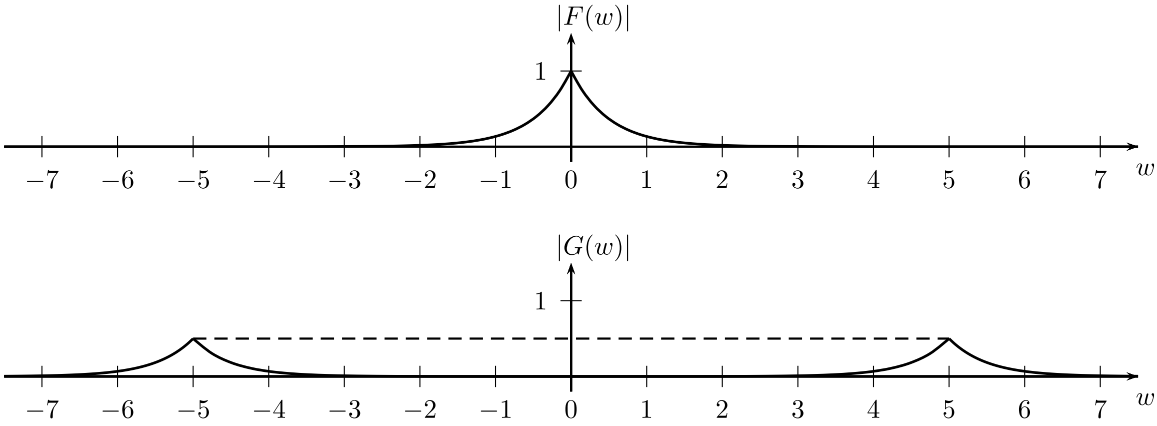
Solução:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t)\} &= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+t^2}e^{-iwt}dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(wt) - i\,\text{sen}(wt)}{4+t^2}dt
\end{aligned}$$

Como $f(t)$ é par, temos que $\frac{\cos(wt)}{4+t^2}$ é par e $\frac{\text{sen}(wt)}{4+t^2}$ é ímpar. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t)\} &= \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(wt)}{4+t^2}dt \\
&= \frac{4}{\pi}\frac{\pi}{4}e^{-2|w|} \\
&= e^{-2|w|}
\end{aligned}$$

b) Como $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ é real e positiva, $|F(w)| = F(w)$. Pelo propriedade da modulação, temos que $G(w) = \frac{F(w+5) + F(w-5)}{2}$. Aqui, quando $|F(w+5)|$ está longe do zero, $|F(w-5)|$ é quase zero, de tal forma que a aproximação $|G(w)| \approx \frac{|F(w+5)| + |F(w-5)|}{2}$ é bem razoável. Os gráficos seguem abaixo:



|F(w)|
1
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7
w
|G(w)|
1
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7
w