UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2023/1
Prova da área IIB

1 - 3	4	5	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2}F(w - w_0) + \frac{1}{2}F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right), \quad a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n\cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt,$ $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_n t)dt,$ $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t},$ onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} (A(w)\cos(wt) + B(w)\operatorname{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw,$ onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Integrais definidas

1. $$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$$

2. $$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$$

3. $$\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-|m|a} \qquad (a>0)$$

4. $$\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-|m|a}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}e^{-|m|a}, & m<0 \end{cases}$$

5. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$$

6. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$$

7. $$\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$$

8. $$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$$

9. $$\int_0^\infty xe^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$$

10. $$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = \\ = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$$

11. $$\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$$

12. $$\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\operatorname{sen}(ma)+\cos(ma))$$

13. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(mx)}{x^2}dx = |m|\frac{\pi}{2}$$

14. $$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$$

15. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(ax)\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$$

16. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\le n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\le m) \end{cases}$$

17. $$\int_0^\infty x^2e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$$

18. $$\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$$

19. $$\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\ge 0)$$

20. $$\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$$

21. $$\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\ge 0)$$

22. $$\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Identidades Trigonométricas:

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}$$

Integrais:

$$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$$

$$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$$

$$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$$

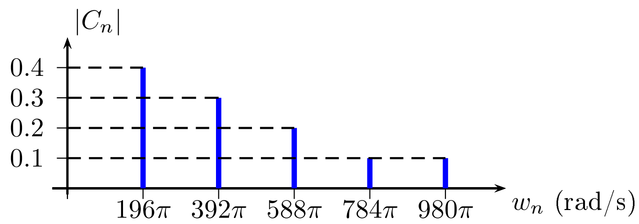
$$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$$

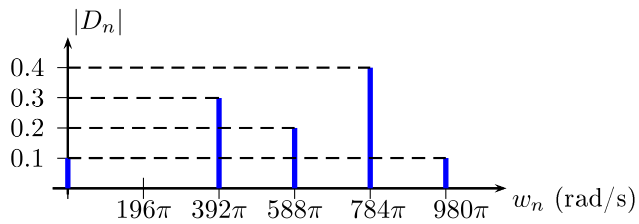
$$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$$

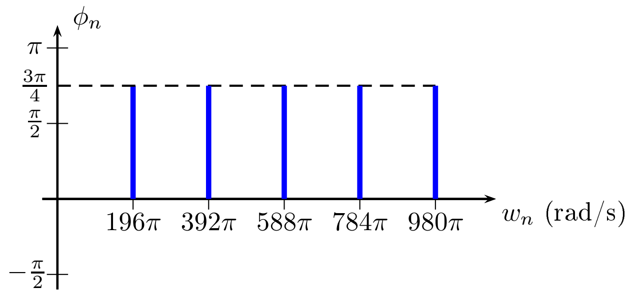
$$\int x^2\cos(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\cos(\lambda x)+(\lambda^2x^2-2)\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^3}+C$$

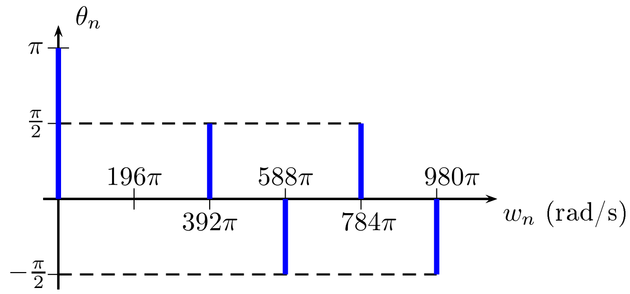
$$\int x^2\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)+(2-\lambda^2x^2)\cos(\lambda x)}{\lambda^3}+C$$

• **Questão 1** (0.5 ponto por item) Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções periódicas cujas séries de Fourier são dadas por $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}$ e $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{iw_n t}$ onde w_1 é a fundamental. Seguem abaixo os diagramas de espectro de amplitudes e fase da duas séries de Fourier:









Quais são as notas musicais que representam os sinais $f(t)$ e $g(t)$, respectivamente?

( ) Sol da escala 3 e Sol da escala 2
( ) Sol da escala 4 e Sol da escala 3
( ) Sol da escala 5 e Sol da escala 4
( ) Sol da escala 3 e Sol da escala 3
(x) Sol da escala 2 e Sol da escala 2

A(s) nota(s) representada(s) pelo sinal $f(3t) + g(2t)$ soam um:

(x) Uma única nota - Sol da escala 2
( ) Uma única nota - Sol da escala 3
( ) Duas notas - Sol da escala 3 e Ré da escala 4.
( ) Uma única nota - Ré da escala 4
( ) Duas notas - Sol da escala 2 e Ré da escala 3.

Escrevendo $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t)$, temos:

(x) $a_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$ e $b_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$
( ) $a_1 = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ e $b_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$
( ) $a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{5}$ e $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{5}$
( ) $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{5}$ e $b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{5}$
( ) $a_1 = \frac{2}{5}$ e $b_1 = 0$

Período e coeficientes da série exponencial de $g(t)$ (T e D_n):

( ) $T = \frac{1}{196\pi}$, $D_1 = 0$ e $D_2 = \frac{3i}{10}$.
( ) $T = \frac{1}{196\pi}$, $D_1 = \frac{3i}{10}$ e $D_2 = -\frac{2i}{10}$.
( ) $T = \frac{1}{98}$, $D_1 = 0$ e $D_2 = -\frac{2i}{10}$.
( ) $T = \frac{1}{98}$, $D_1 = \frac{3i}{10}$ e $D_2 = -\frac{2i}{10}$.
(x) $T = \frac{1}{98}$, $D_1 = 0$ e $D_2 = \frac{3i}{10}$.

Potência média do sinal $f(t)$ dada por $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$

( ) $2,2$.
( ) $1,1$.
(x) $0,62$.
( ) $0,31$.
( ) $0,11$.

O valor médio do sinal $g(t)$ dado por $\frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt$

( ) $0,1$
(x) $-0,1$
( ) $0,2$
( ) $-0,2$
( ) $-0,05$

• **Questão 2** (0.5 ponto por item) Sejam os números complexos $Z_1 = \dfrac{1+7i}{3-4i}$ e $Z_2 = (1-i)^{50}$. Assinale as alternativas que indicam Z_1 e Z_2:

( ) $1+i$
( ) $1-i$
(x) $-1+i$
( ) $-1-i$
( ) $(1-i)/12$
( ) $(-i)/12$
( ) N.D.A.

( ) 2
( ) $1-i$
( ) $1+i$
(x) $-2^{25}i$
( ) $2^{25}i$
( ) $2^{50}i$
( ) N.D.A.

$$Z_1 = \frac{(1+7i)}{(3-4i)}\frac{(3+4i)}{(3+4i)} = \frac{-25+25i}{25} = -1+i$$

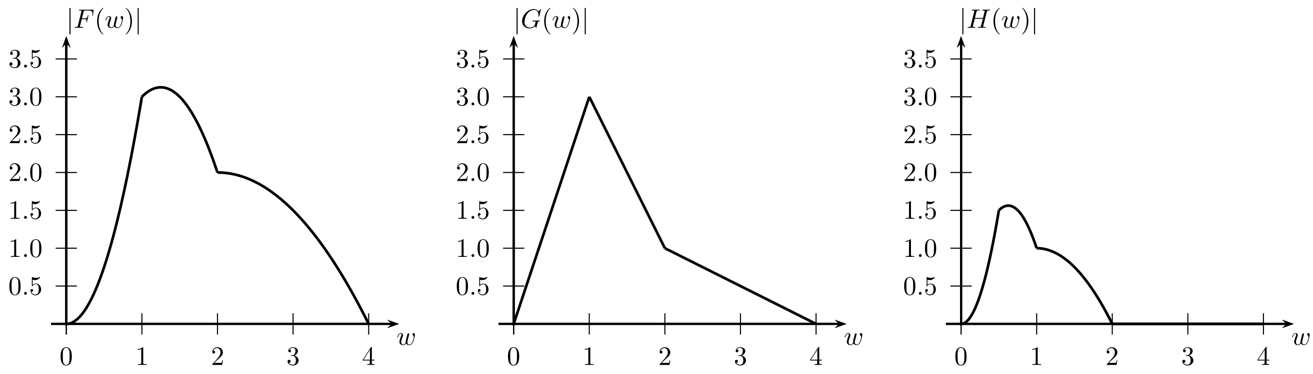
Para calcular Z_2, escrevemos $1-i$ na forma complexa:

$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-\pi/4}$$

Assim:

$$Z_2 = 2^{25}e^{-25\pi/2} = 2^{25}e^{-\pi/2} = 2^{25}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2^{25}i$$

• **Questão 3** (0.5 ponto por item - total de 1.0 pontos) Considere três funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ e suas respectivas transformadas de Fourier $F(w)$, $G(w)$ e $H(w)$. Abaixo estão apresentados os diagramas de espectro de magnitudes das três funções.

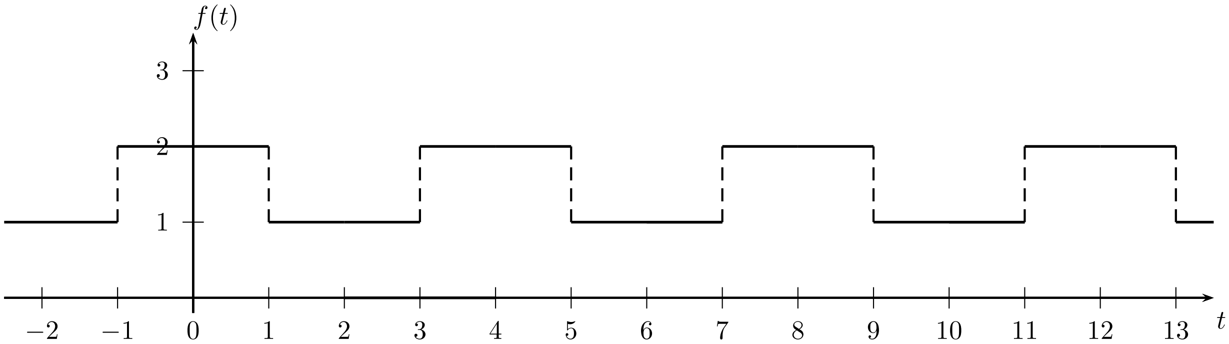


Assinale em cada coluna o item que é compatível com os gráficos.

( ) $h(t) = f(2t)$
( ) $f(t) = 2h(2t)$
(x) $f(t) = 4h(2t)$
( ) $h(t) = 2f\left(\dfrac{t}{2}\right)$
( ) $f(t) = 4h\left(\dfrac{t}{2}\right)$

(x) $f(t) = g'(t)$
(x) $h(t) = g'(t)$
( ) $h(t) = f'(t)$
( ) $f(t) = g'(t)$
( ) $h(t) = g'(2t)$

• **Questão 4** (3.0 pontos) Considere a função periódica $f(t)$ dada no gráfico abaixo.



Considere a Série de Fourier da função $f(t)$ dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t}$$

a) (0.5 ponto) Calcule o período fundamental e a frequência fundamental, w_1.

b) (0.5 ponto) Calcule a potência média $\bar{P}_f$

c) (1.0 ponto) Calcule os coeficientes a_n e b_n.

d) (1.0 ponto) Seja $f_4(t)$ a série truncada de $f(t)$ dada por:

$$f_4(t) = \sum_{n=-4}^{4} C_n e^{i w_n t}$$

Calule a potência média de $f_4(t)$.

Vemos do gráfico que o período fundamental é $T_f = 4$, logo a frequência fundamental é $f_f = \frac{1}{4}$ ou $w_f = \frac{\pi}{2}$. A função é par.

A potência média é mais facilmente obtida da definição:

$$\begin{aligned} \bar{P}_f &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} |f(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2}\left[2^2 + 1^2\right] = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Aqui se usou que $|f(t)|$ é uma função par.

Como $f(t)$ é par, temos que $b_n = 0$ para todo n. Calculamos a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-2}^{2} f(t)dt \\ &= \int_{0}^{2} f(t)dt = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Para calcular a_n para $n \geq 1$, vemos que:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-2}^{2} f(t)\cos(w_n t)dt \\ &= \int_{0}^{2} f(t)\cos(w_n t)dt \\ &= 2\int_{0}^{1} \cos(w_n t)dt + \int_{1}^{2} \cos(w_n t)dt \\ &= \frac{1}{\omega_n}\left[2 \operatorname{sen}(w_n)|_0^1 + \operatorname{sen}(w_n)|_1^2\right] \end{aligned}$$

Como $w_n = \frac{2\pi n}{4} = \frac{\pi n}{2}$, temos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi n}\left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\Big|_0^1 + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\Big|_1^2\right] \\ &= \frac{2}{\pi n}\left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{2}{\pi n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_1 &= \frac{2}{\pi} \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= \frac{2}{3\pi} \\ a_4 &= 0 \end{aligned}$$

A potência média de $f_4(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{f_4} &= \sum_{n=-4}^{4} |C_n|^2 = \sum_{n=-4}^{4}\left|\frac{a_n - ib_n}{2}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[a_0^2 + 2a_1^2 + 2a_3^2\right] = \frac{9}{4} + \frac{20}{9\pi^2} \end{aligned}$$

• **Questão 5** (2.0 pontos) Considere a funçao $f(t)$ dada abaixo.

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{4+t^2}$$

a) (1.0 ponto) Calcule, a partir da definição, a transformada de Fourier da função $f(t)$.

b) (0.5 ponto) Escreva a a função $F(w)$ na forma $F(w) = |F(w)|e^{i\phi(w)}$.

c) (0.5 ponto) Calcule a energia total da função.

Solução:

$$\begin{aligned}
F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\cos(wt) - i\,\mathrm{sen}(wt)\right]dt \\
&= -2i\int_{0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(wt)dt \\
&= -\frac{2i}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{t}{4+t^2}\,\mathrm{sen}(wt)dt
\end{aligned}$$

Da tabela de integrais, vemos que:

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-ma}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}e^{-ma}, & m < 0 \end{cases}$$

Substituímos $x \leftarrow t$, $a \leftarrow 2$ e $m \leftarrow w$, temos:

$$F(w) = \begin{cases} -ie^{-2|w|}, & w > 0, \\ 0, & w = 0, \\ ie^{-2|w|} & w < 0. \end{cases}$$

Logo:

$$|F(w)| = e^{-2|w|}.$$

e

$$\phi(w) = \begin{cases} -\pi/2, & w < 0, \\ \pi/2, & w > 0. \end{cases}$$

A energia pode ser calculada via Teorema de Parseval:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|w|}dw \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-4w}dw \\
&= \frac{1}{4\pi}
\end{aligned}$$