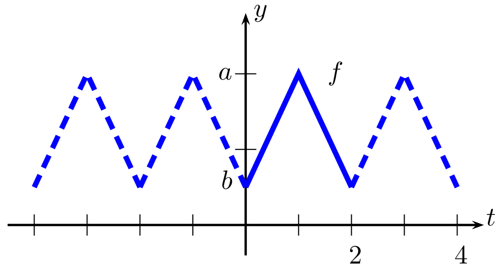
UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2023/2
Prova da área IIB

1 - 4	5	6	Total

Nome: Gabarito **Cartão:** ________________

Questão 1.(0.8pt) Sobre os coeficientes da Série de Fourier $f = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t)$ onde f, representada ao lado, tem menor período $T = 2$, é correto:



( ) $a_0 = \dfrac{a+b}{2}$, $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$

( ) $a_0 = \dfrac{a-b}{2}$, $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$

(X) $a_0 = a + b$, $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$

( ) $a_0 = a - b$, $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$

( ) $a_0 = 0$, $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$

( ) nenhuma das anteriores é correta

Solução: como f é uma função par, segue $b_n = 0$ para $n \geq 1$. Por outro lado

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt = 2\int_0^1 f(t)dt = 2 \cdot \frac{a+b}{2} = a + b$$

Questão 2.(3.2pt) Considere $f(t) = -2\cos^2(t) + \operatorname{sen}(2t) + \operatorname{sen}(4t)$ e sua expansão em Série de Fourier (forma exponencial) $f = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}$ em que w_1 é a frequência fundamental, $i^2 = -1$, é correto:

Frequência fundamental

( ) $w_1 = 1/2$

( ) $w_1 = 1$

(X) $w_1 = 2$

( ) $w_1 = 3$

( ) $w_1 = 4$

( ) nenhuma das anteriores está correta

Fase (argumento) de C_2

( ) $\phi_2 = 3\pi/4$

( ) $\phi_2 = \pi/2$

( ) $\phi_2 = \pi/4$

( ) $\phi_2 = -3\pi/4$

(X) $\phi_2 = -\pi/2$

( ) nenhuma das anteriores está correta

Módulo de C_2

( ) $|C_2| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(X) $|C_2| = 1/2$

( ) $|C_2| = 1$

( ) $|C_2| = \sqrt{2}$

( ) $|C_2| = 2$

( ) nenhuma das anteriores está correta

Potência média $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T |f(t)|^2 dt$

( ) $\bar{P}_f = 1$

( ) $\bar{P}_f = 1/2$

( ) $\bar{P}_f = 3/2$

(X) $\bar{P}_f = 5/2$

( ) $\bar{P}_f = 2$

( ) nenhuma das anteriores está correta

Solução:

$$f = -2\frac{1+\cos(2t)}{2} + \operatorname{sen}(2t) + \operatorname{sen}(4t) = -1 - \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) + \operatorname{sen}(4t) = -1 - \frac{e^{-2it} + e^{2it}}{2} + \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} + \frac{e^{4it} - e^{-4it}}{2i} =$$
$$-\frac{1}{2i}e^{-4it} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2i}\right)e^{-2it} - 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}\right)e^{2it} + \frac{1}{2i}e^{4it} = \frac{i}{2}e^{-4it} + \frac{i-1}{2}e^{-2it} - 1 - \frac{1+i}{2}e^{2it} - \frac{i}{2}e^{4it}$$

e portanto $w_1 = 2$. Por outro lado, $C_2 = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$, segue $|C_2| = \dfrac{1}{2}$ e $\phi_2 = -\dfrac{\pi}{2}$.

Por outro lado (Parseval), $\bar{P}_f = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |C_n|^2 = |C_{-2}|^2 + |C_{-1}|^2 + |C_0|^2 + |C_1|^2 + |C_2|^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + 1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$

Questão 3. (0.8pt) Considere $f(t) = te^{-|t|}$. Sobre a transformada de Fourier $F(w)$ de $f(t)$, é correto:

( ) $F(w) = \dfrac{-4iw}{1+w^2}$

( ) $F(w) = \dfrac{-2iw}{1+w^2}$

( ) $F(w) = \dfrac{-2w}{(1+w^2)^2}$

( ) $F(w) = \dfrac{1-w^2}{(1+w^2)^2}$

(X) nenhuma das alternativas anteriores

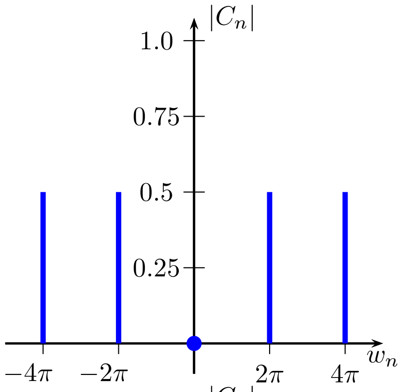
Solução: uma vez que f é impar

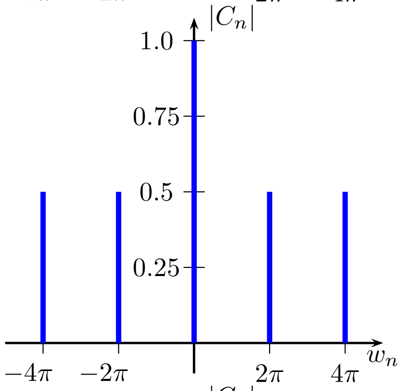
$$F(w) = -2i\int_0^\infty te^{-|t|}\operatorname{sen}(wt)dt =$$

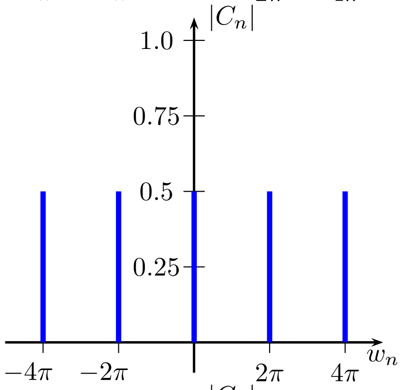
$$-2i\int_0^\infty te^{-t}\operatorname{sen}(wt)dt = -2i\cdot\frac{2(1)w}{(1+w^2)^2} =$$

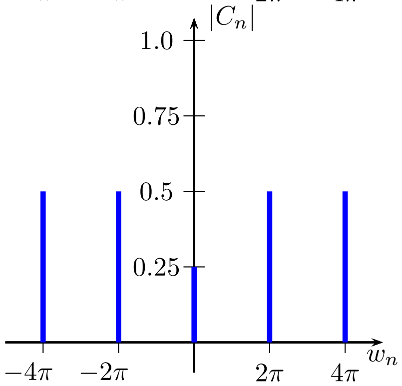
$$-\frac{4iw}{(1+w^2)^2}$$

Questão 4. (1.2pt) Considere a função $f(t) = \cos(4\pi t) + 2\operatorname{sen}^2(\pi t)$. Sobre o diagrama de espectro de módulo (primeira coluna) e diagrama de espectro de fase, estão corretos:

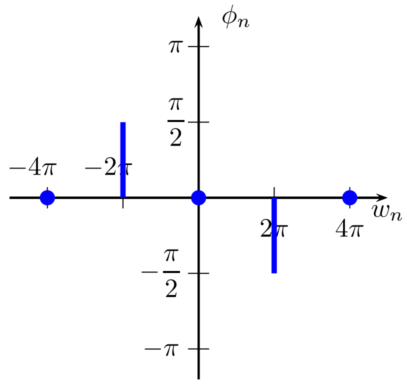
( )


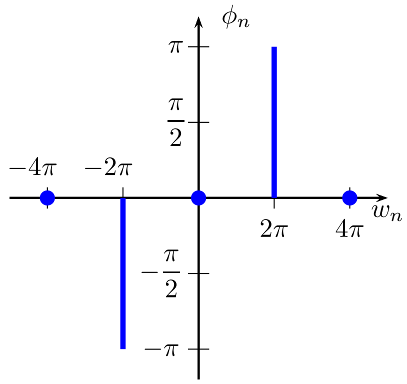
(X)


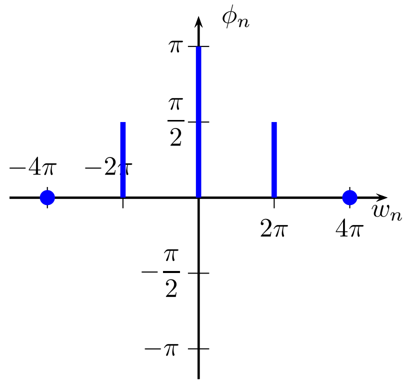
( )


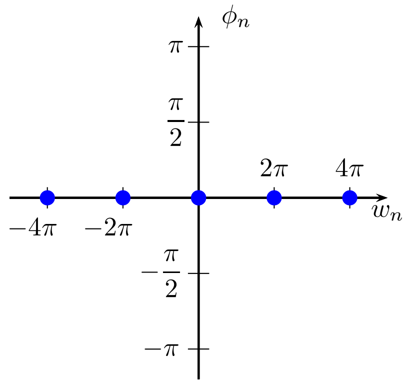
( )


( ) nenhuma das alternativas anteriores

( )


(X)


( )


( )


( ) nenhuma das alternativas anteriores

Solução: aplicando identidade trigonométrica obtemos $f(t) = \cos(4\pi t) + 1 - \cos(2\pi t)$ e portanto
$f(t) = \dfrac{e^{4\pi it} + e^{-4\pi it}}{2} + 1 - \dfrac{e^{2\pi it} + e^{-2\pi it}}{2} = \dfrac{1}{2}e^{-4\pi it} - \dfrac{1}{2}e^{-2\pi it} + 1 - \dfrac{1}{2}e^{2\pi it} + \dfrac{1}{2}e^{4\pi it}$
Assim $|C_0| = 1$, $|C_{-2}| = |C_{-1}| = |C_1| = |C_2| = \dfrac{1}{2}$ com ângulos $\phi_2 = \phi_0 = \phi_2 = 0$ e $\phi_{-1} = \phi_1 = \pm\pi$.

Questão 5 Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \text{ para todos } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

5A.(0.8pt) Obtenha a transformada de Fourier $F(\cdot)$ de $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}, x \in \mathbb{R}$
5B.(0.6pt) Obtenha e resolva equação diferencial ordinária em t satisfeita pela transformada de Fourier $U(\cdot,t)$ da solução $u(x,t)$, juntamente com sua condição inicial em $t = 0$ para qualquer f.
5C.(0.6pt) Obtenha a solução $u(x,t)$ do problema do enunciado para $f(x)$ conforme definida em **5A**.

Solução:
(A) $f(x)$ é uma função par, $F(k) = 2\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(kx)}{4+x^2}dx = 2\frac{\pi}{2(2)}e^{-2k} = \frac{\pi e^{-2k}}{2}$
(B) $\begin{cases} U_{tt} - 4(ik)^2U = 0 \Rightarrow U_{tt} = -4k^2U \\ U(k,0) = \mathcal{F}(f(x)) = F(k) \end{cases}$ A solução geral da EDO: $U(k,t) = A(k)\cos(2kt) + B(k)\,\text{sen}(2kt)$.
$U(k,0) = F(k)$ implica $A(k)(1) = F(k)$ e assim $A(k) = F(k)$.
$U_t(k,0) = 0$ implica $2kB(k) = 0$ e assim $B(k) = 0$ e segue $U(k,t) = F(k)\cos(2kt)$
(C) Prop Modulação:: $u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(F(k)\cos(2kt)\right) = \dfrac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{4+(x+2t)^2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{4+(x-2t)^2}$

Questão 6 Considere o problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -u, \text{ para todos } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

6A.(0.4pt) Obtenha a transformada de Fourier $F(\cdot)$ de $f(x) = 3\delta(x-2), x \in \mathbb{R}$, onde $\delta(\cdot)$ é a Delta de Dirac.

6B.(0.6pt) Obtenha a transformada de Fourier $G(\cdot)$ de $g(x) = e^{-\frac{x^2}{4t}}, x \in \mathbb{R}, t > 0$ usando (e indicando) as propriedades da tabela de transformadas de Fourier no verso da primeira folha.

6C.(0.6pt) Obtenha e resolva a equação diferencial ordinária satisfeita pela transformada de Fourier $U(\cdot,t)$ da solução $u(x,t)$, juntamente com sua condição inicial em $t = 0$, para qualquer f.

6D.(0.4pt) Obtenha a solução $u(x,t)$ do problema do enunciado para $f(x)$ conforme definida em **6A**.

Solução:
(A) $\mathcal{F}(f(x)) = \displaystyle\int_0^\infty 3\delta(x-2)e^{-ikx}dx = 3e^{-2ik}$ (prop da amostragem)

(B) f é par e ainda, pela prop 8 da tabela :: $\mathcal{F}(e^{-a^2x^2}) = 2\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(kx)dx = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{x^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$
Para $a = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ temos $a^2 = \dfrac{1}{4t}$ e assim $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \sqrt{\pi}(2)\sqrt{t}e^{-tk^2} = 2\sqrt{\pi t}e^{-tk^2}$

(C) $\begin{cases} U_t = (ik)^2U - U = -(1+k^2)U \\ U(k,0) = \mathcal{F}(f(x)) = F(k) \end{cases} \Rightarrow U(k,t) = U(k,0)e^{-(1+k^2)t} = F(k)e^{-t}e^{-k^2t}$

(D) Para $f(x) = 3\delta(x-2)$ temos $U(k,t) = 3e^{-t}e^{-2ik}e^{-tk^2}$. Além disso, pelo ítem (B) segue $\mathcal{F}\left(\dfrac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\right) = e^{-tk^2}$.

Portanto

$$u(x,t) = 3e^{-t}\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2ik}e^{-k^2t}\right) = 3e^{-t}\frac{e^{-\frac{(x-2)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} = \frac{3e^{-t}e^{-\frac{(x-2)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}$$

□