UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2023/2
Prova da área IIb

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} = \frac{1}{2}F(w - w_0) + \frac{1}{2}F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(w_nt) + b_n\,\mathrm{sen}(w_nt)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_nt)dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_ne^{iw_nt}$, onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(w)\cos(wt) + B(w)\,\mathrm{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$, onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Integrais definidas

1. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-\lvert m\rvert a} \qquad (a>0)$	4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-ma}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}e^{ma}, & m<0 \end{cases}$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad \begin{matrix}(m>0, \\ n>0)\end{matrix}$	6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = $ $\displaystyle = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$
11. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\operatorname{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $\displaystyle erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(ax)\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\le n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\le m) \end{cases}$
17. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$
19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad \begin{matrix}(a>0, \\ m\ge 0)\end{matrix}$	20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$
21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad \begin{matrix}(a>0, \\ m\ge 0)\end{matrix}$	22. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Identidades Trigonométricas:

$\displaystyle\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$	$\displaystyle\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$	$\displaystyle\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\displaystyle\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\displaystyle\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\displaystyle\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$
$\displaystyle\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\displaystyle\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\displaystyle\int x^2\cos(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\cos(\lambda x)+(\lambda^2x^2-2)\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^3}+C$
$\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)+(2-\lambda^2x^2)\cos(\lambda x)}{\lambda^3}+C$

• **Questão 1** (3.0 pontos) Considere as funções periódicas

$$f(t) = 1 + \operatorname{sen}(2t) + \cos(3t) \qquad \text{e} \qquad g(t) = 4\operatorname{sen}^3(t)$$

Responda os itens abaixo:

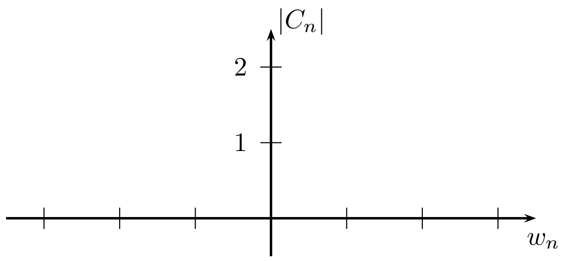
a) (1.0) Preencha a tabela abaixo com os períodos fundamentais e as frequências angulares fundamentais das funções $f(t)$ e $g(t)$ e de $f(t)+g(t)$.

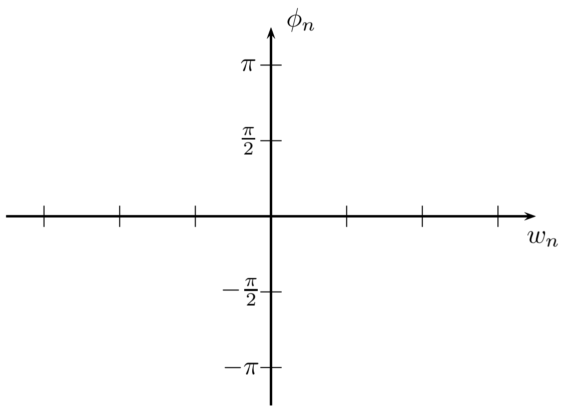
	Período	Frequência
$f(t)$		
$g(t)$		
$f(t)+g(t)$		

b) (1.0) Preencha a tabela abaixo com os coeficientes a_0, C_0 e a_n, b_n e C_n, $n = 1, 2, 3$, da função $f(t)+g(t)$.

n	a_n	b_n	C_n
0			
1			
2			
3			

c) (1.0) Esboce o diagrama de espectro da função $f(t)+g(t)$ nos espaços abaixo.





Solução:a) Como as frequências que aparecem na função $f(t)$ são 2 e 3, a frequência fundamental é 1, fazendo o período fundamental ser 2π. Para calcular a frequência da função $g(t)$, fazemos a seguinte expansão:

$$\begin{aligned} g(t) &= 4\operatorname{sen}^3(t) \\ &= 4\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{e^{3it} - 3e^{2it}e^{-it} + 3e^{it}e^{-2it} - e^{-3it}}{-2i} \\ &= \frac{e^{3it}-e^{-3it}}{-2i} + \frac{-3e^{it}+3e^{-it}}{-2i} \\ &= -\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i} + 3\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\ &= -\operatorname{sen}(3t) + 3\operatorname{sen}(t). \end{aligned}$$

Como as frequências que aparecem na função $g(t)$ são 1 e 3, a frequência fundamental é 1, fazendo o período fundamental ser 2π. Observe que

$$f(t)+g(t) = 1 + 3\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(2t) + \cos(3t) - \operatorname{sen}(3t)$$

também possui frequência fundamental 1 e período fundamental ser 2π.

	Período	Frequência
$f(t)$	2π	1
$g(t)$	2π	1
$f(t)+g(t)$	2π	1

b) Podemos coletar os coeficientes de Fourier da expressão de $f(t)+g(t)$.

n	a_n	b_n	C_n
0	2		$C_0 = \frac{a_0}{2} = 1$
1	0	3	$C_1 = \frac{a_1 - ib_1}{2} = -\frac{3i}{2}$
2	0	1	$C_2 = \frac{a_2 - ib_2}{2} = -\frac{i}{2}$
3	1	-1	$C_3 = \frac{a_3 - ib_3}{2} = \frac{1+i}{2}$

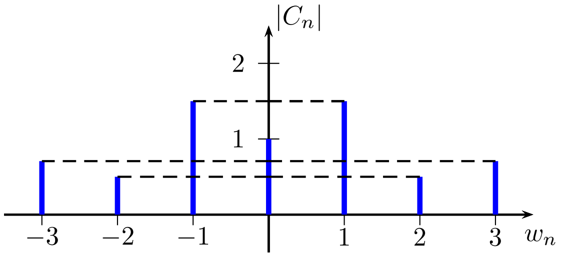
c) Escrevemos $C_n = |C_n|e^{i\phi_n}$ para fazer as diagramas de módulo e fase:

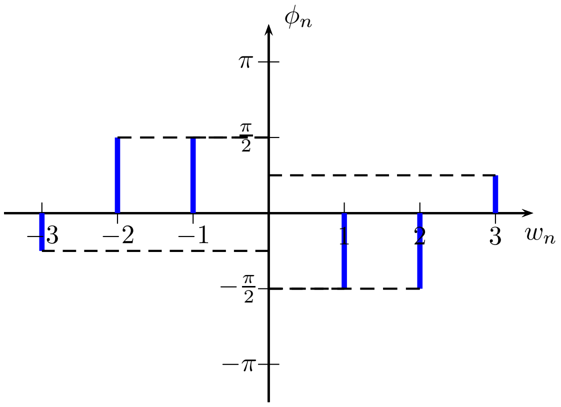
$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_1 &= \frac{3}{2}e^{-i\pi/2} \\ C_2 &= \frac{1}{2}e^{-i\pi/2} \\ C_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4} \end{aligned}$$

Lembremos que $C_{-n} = \overline{C_n}$, isto é,

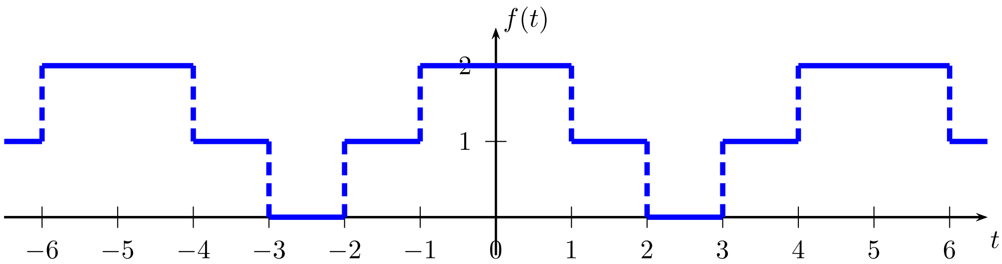
$$\begin{aligned} C_{-1} &= \frac{3}{2}e^{i\pi/2} \\ C_{-2} &= \frac{1}{2}e^{i\pi/2} \\ C_{-3} &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4} \end{aligned}$$

Os gráficos tomam a forma:





• **Questão 2** (2.0 pontos) Calcule a série de Fourier da função periódica dada no gráfico abaixo.



Solução: Como a função é par, $b_n = 0$. Vamos calcular a_n.
Observe que o período é $T = 5$ e $w_n = \dfrac{2\pi n}{5}$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{5}\int_{-5/2}^{5/2} f(t)dt \\ &= \frac{4}{5}\int_{0}^{5/2} f(t)dt \\ &= \frac{4}{5}\left(\int_0^1 2dt + \int_1^2 1dt\right) \\ &= \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{5}\int_{-5/2}^{5/2} f(t)\cos(w_n t)dt \\ &= \frac{4}{5}\int_{0}^{5/2} f(t)\cos(w_n t)dt \\ &= \frac{4}{5}\left(\int_0^1 2\cos\left(\frac{2\pi nt}{5}\right)dt + \int_1^2 \cos\left(\frac{2\pi nt}{5}\right)dt\right) \\ &= \frac{4}{5}\left\{\left[\frac{10}{2\pi n}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{5}\right)\right]_0^1 + \left[\frac{5}{2\pi n}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{5}\right)\right]_1^2\right\} \\ &= \frac{20}{5}\left[\frac{1}{\pi n}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{1}{2\pi n}\left(\text{sen}\left(\frac{4\pi n}{5}\right) - \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{5}\right)\right)\right] \\ &= \frac{2}{\pi n}\left[\text{sen}\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \text{sen}\left(\frac{4\pi n}{5}\right)\right] \end{aligned}$$

- **Questão 3** (2.0 pontos) Resolva os itens abaixo.

a) (1.0 ponto) Use a definição de transformadas de Fourier para calcular $F(w) = \mathcal{F}\{e^{-4t^2}\}$.

b) (1.0 ponto) Escolhe uma estratégia para calcular $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{iw(e^{-(w-2)^2/16} + e^{-(w+2)^2/16})\}$.

Solução: a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{e^{-4t^2}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t^2} e^{-iwt} dt \\
&= 2\int_0^{\infty} e^{-4t^2} \cos(wt) dt \\
&= 2\frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-w^2/16} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-w^2/16}.
\end{aligned}$$

Solução: b) Pelo item a), sabemos que

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-w^2/16}\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-4t^2}$$

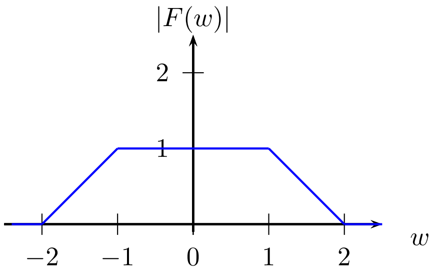
Assim, pela usando a propriedade da modulação, temos:

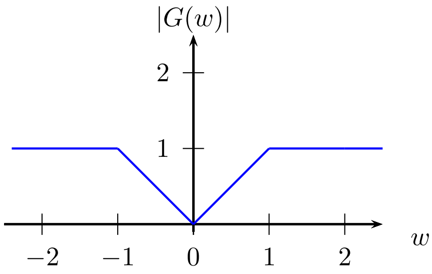
$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-(w-2)^2/16} + e^{-(w+2)^2/16}\} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-4t^2} \cos(2t).$$

Agora, pela propriedade da transformada da derivada, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{iw(e^{-(w-2)^2/16} + e^{-(w+2)^2/16})\} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-4t^2} \cos(2t)\right) \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(-2e^{-4t^2} \operatorname{sen}(2t) - 8te^{-4t^2} \cos(2t)\right) \\
&= -\frac{8e^{-4t^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\operatorname{sen}(2t) + 4t\cos(2t)\right).
\end{aligned}$$

• **Questão 4** (3.0 pontos) Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções que possuem transformadas de Fourier e $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ e $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$. Os gráficos abaixo apresentam os seus diagramas de espectro de magnitudes.





a) (0.5 ponto) Calcule a energia total do sinal $f(t)$ dado pela expressão

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

b) (0.5 ponto) Calcule o módulo do valor médio do sinal $f(t)$ dado pela expressão

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\right|.$$

c) (1.0 ponto) Esboce o diagrama de magnitudes de $h(t) = f'(t)\cos(3t)$.

d) (1.0 ponto) Esboce o diagrama de magnitudes de $p(t) = \dfrac{d}{dt}(f(t) * g(t))$.

Solução:a) Pelo Teorema de Parseval

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} |F(w)|^2 dw \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{2} |F(w)|^2 dw \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{1} |F(w)|^2 dw + \int_{1}^{2} |F(w)|^2 dw\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{1} 1 dw + \int_{1}^{2} (2-w)^2 dw\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(1 + \left[-\frac{(2-w)^3}{3}\right]_1^2\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\pi}
\end{aligned}$$

b) Pela definição de transformada de Fourier, temos

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt.$$

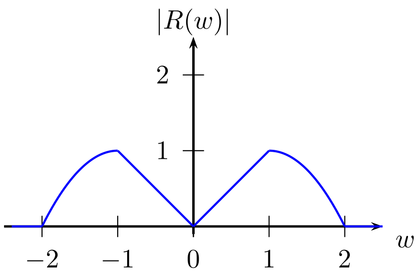
Logo,

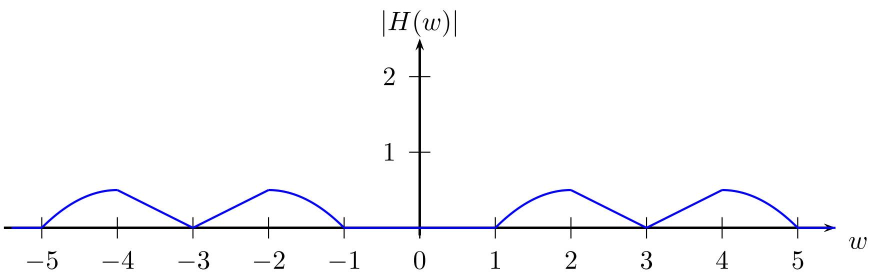
$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

e

$$|F(0)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\right| = 1.$$

c) Definimos $r(t) = f'(t)$ e $h(t) = r(t)\cos(3t)$. Primeiro esboçamos $|R(w)| = |w||F(w)|$ e depois $|H(w)| = \dfrac{|R(w+3)| + |R(w-3)|}{2}$, onde usamos as propriedades da derivada e da modulação, além do fato de $R(w-3)$ e $R(w+3)$ não ter sobreposição espectral.





d) Defina $q(t) = (f * g)(t)$ e $p(t) = q'(t)$. Pelas propriedades da convolução e derivada, temos $|Q(w)| = |F(w)||G(w)|$ e $|P(w)| = |w||Q(w)|$.