UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2023/2
Prova da área IIb

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2}F(w - w_0) + \frac{1}{2}F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t)\right]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_n t)dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}$, onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(A(w)\cos(wt) + B(w)\operatorname{sen}(wt)\right)dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$, onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Integrais definidas

1. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$

2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-|m|a} \qquad (a>0)$

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-ma}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}e^{ma}, & m<0 \end{cases}$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$

7. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$

8. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

9. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$

10. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)dx = $
$$= \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$$

11. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$

12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\mathrm{sen}(ma)+\cos(ma))$

13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(mx)}{x^2}dx = |m|\frac{\pi}{2}$

14. $\displaystyle erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$

15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(ax)\,\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$

16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\le n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\le m) \end{cases}$

17. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$

18. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$

19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\ge 0)$

20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$

21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\ge 0)$

22. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$	$\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) = \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$	$\mathrm{sen}(x)\cos(y) = \dfrac{\mathrm{sen}(x+y)+\mathrm{sen}(x-y)}{2}$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$$

$$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$$

$$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$$

$$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$$

$$\int x\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$$

$$\int x^2\cos(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\cos(\lambda x)+(\lambda^2x^2-2)\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^3}+C$$

$$\int x^2\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)+(2-\lambda^2x^2)\cos(\lambda x)}{\lambda^3}+C$$

• **Questão 1** (3.0 pontos) Considere as funções periódicas

$$f(t) = 4\,\text{sen}(2t) + \text{sen}(4t) \qquad \text{e} \qquad g(t) = 8\cos^4(t)$$

Responda os itens abaixo:

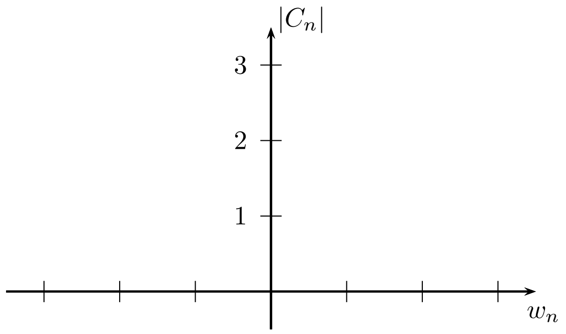
a) (1.0) Preencha a tabela abaixo com os períodos fundamentais e as frequências angulares fundamentais das funções $f(t)$ e $g(t)$ e de $f(t) + g(t)$.

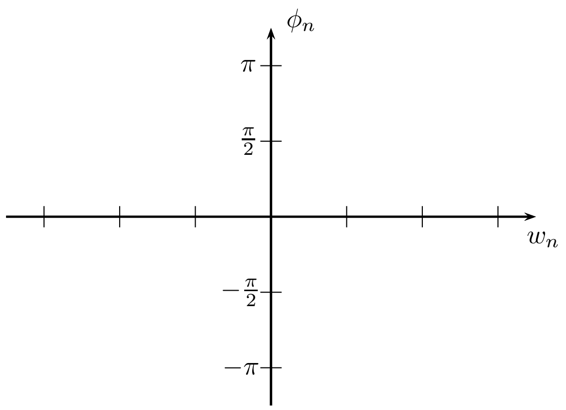
	Período	Frequência
$f(t)$		
$g(t)$		
$f(t) + g(t)$		

b) (1.0) Preencha a tabela abaixo com os coeficientes a_0, C_0 e a_n, b_n e C_n, $n = 1, 2, 3$, da função $f(t) + g(t)$.

n	a_n	b_n	C_n
0			
1			
2			
3			

c) (1.0) Esboce o diagrama de espectro da função $f(t) + g(t)$ nos espaços abaixo.





Solução: a) As frequências que aparecem na função $f(t)$ são 2 e 4, sendo 2 a frequência fundamental e π o período fundamental. Para calcular a frequência da função $g(t)$, fazemos a seguinte expansão:

$$\begin{aligned}
g(t) &= 8\cos^4(t) \\
&= 8\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{e^{4it} + 4e^{3it}e^{-it} + 6e^{2it}e^{-2it} + 4e^{it}e^{-3it} + e^{-4it}}{2} \\
&= 3 + \frac{e^{4it} + e^{-4it}}{2} + \frac{4e^{2it} + 4e^{-2it}}{2} \\
&= 3 + 4\cos(2t) + \cos(4t)
\end{aligned}$$

Como as frequências que aparecem na função $g(t)$ são 2 e 4, a frequência fundamental é 2, fazendo o período fundamental ser π. Observe que

$$f(t) + g(t) = 4\,\text{sen}(2t) + \text{sen}(4t) + 3 + 4\cos(2t) + \cos(4t) = 3 + 4\cos(2t) + 4\,\text{sen}(2t) + \cos(4t) + \text{sen}(4t)$$

também possui frequência fundamental 2 e período fundamental ser π.

	Período	Frequência
$f(t)$	π	2
$g(t)$	π	2
$f(t) + g(t)$	π	2

b) Podemos coletar os coeficientes de Fourier da expressão de $f(t) + g(t)$.

n	a_n	b_n	C_n
0	6		$C_0 = \frac{a_0}{2} = 3$
1	4	4	$C_1 = \frac{a_1 - ib_1}{2} = 2 - 2i$
2	1	1	$C_2 = \frac{a_2 - ib_2}{2} = \frac{1-i}{2}$
3	0	0	$C_3 = 0$

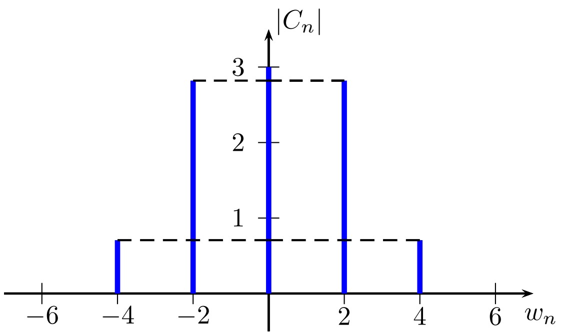
c) Escrevemos $C_n = |C_n|e^{i\phi_n}$ para fazer as diagramas de módulo e fase:

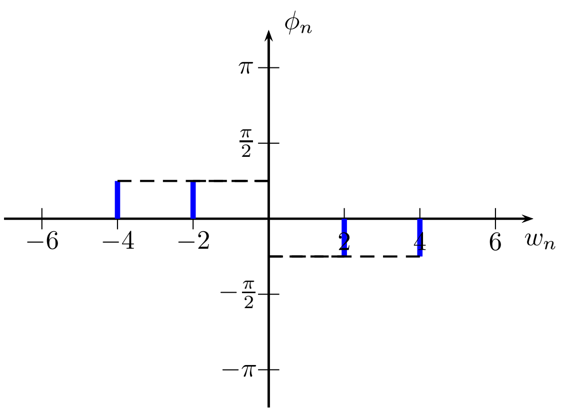
$$\begin{aligned} C_0 &= 3 \\ C_1 &= 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4} \\ C_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4} \end{aligned}$$

Lembremos que $C_{-n} = \overline{C_n}$, isto é,

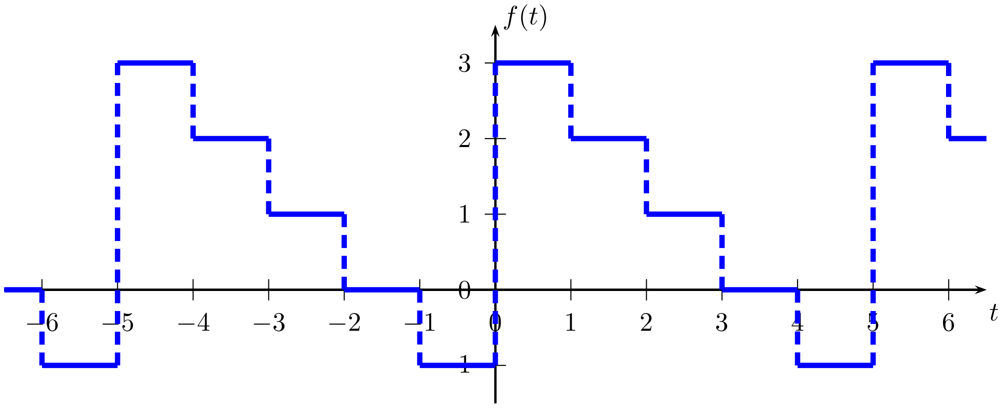
$$\begin{aligned} C_1 &= 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} \\ C_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4} \end{aligned}$$

Os gráficos tomam a forma:





• **Questão 2** (2.0 pontos) Calcule a série de Fourier da função periódica dada no gráfico abaixo.



Solução: A função não é par nem ímpar. Mas observe que $g(t) = f(t) - 1$ é ímpar. Então, vamos calcular os coeficientes de $g(t)$ e depois fazer $f(t) = g(t) + 1$. Como a função $g(t)$ é ímpar, $a_n = 0$. Vamos calcular b_n.

Observe que o período é $T = 5$ e $w_n = \dfrac{2\pi n}{5}$.

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{5}\int_{-5/2}^{5/2} f(t)\,\mathrm{sen}(w_n t)dt \\
&= \frac{4}{5}\int_{0}^{5/2} f(t)\,\mathrm{sen}(w_n t)dt \\
&= \frac{4}{5}\left[\int_0^1 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n t}{5}\right)dt + \int_1^2 \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n t}{5}\right)dt\right] \\
&= \frac{4}{5}\left(\left[-2\frac{\cos\left(\frac{2\pi n t}{5}\right)}{\frac{2\pi n}{5}}\right]_0^1 + \left[-\frac{\cos\left(\frac{2\pi n t}{5}\right)}{\frac{2\pi n}{5}}\right]_1^2\right) \\
&= \frac{2}{\pi n}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + 2 + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) - \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right)\right) \\
&= \frac{2}{\pi n}\left(2 - \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) - \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Agora, observe que os coeficientes a_n e b_n, $n \geq 1$, de $f(t)$ são os mesmos de $g(t)$. Somente o a_0 é diferente. O coeficientes a_0 da função $f(t)$ é 2.

- **Questão 3** (2.0 pontos) Resolva os itens abaixo.

  a) (1.0 ponto) Use a definição de transformadas de Fourier para calcular $F(w) = \mathcal{F}\{e^{-16t^2}\}$.

  b) (1.0 ponto) Escolhe uma estratégia para calcular $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-(2w-3)^2/64} + e^{-(2w+3)^2/64}\}$.

Solução: a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{e^{-16t^2}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-16t^2} e^{-iwt} dt \\
&= 2\int_{0}^{\infty} e^{-16t^2} \cos(wt) dt \\
&= 2\frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-w^2/64} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-w^2/64}.
\end{aligned}$$

Solução: b) Pelo item a), sabemos que

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-w^2/64}\} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-16t^2}$$

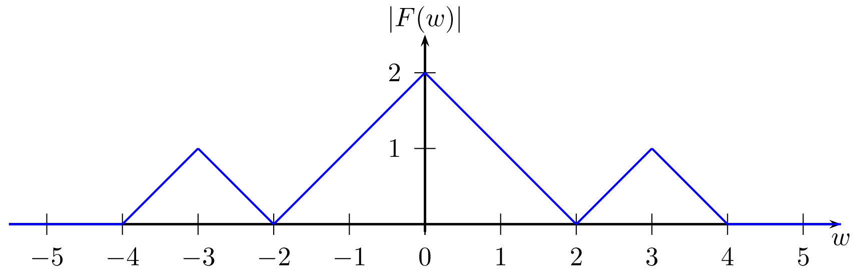
Assim, pela usando a propriedade da mudança de escala, temos que

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-(2w)^2/64}\} = \frac{1}{2}\frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-16(t/2)^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-4t^2}.$$

Pela propriedade da modulação, temos

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-(2w+3)^2/64} + e^{-(2w-3)^2/64}\} = 2\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-4t^2}\cos(3t) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-4t^2}\cos(3t).$$

• **Questão 4** (3.0 pontos) Seja $f(t)$ uma função que possui transformada de Fourier e $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. O gráfico abaixo apresenta o diagrama de espectro de magnitudes.



a) (0.5 ponto) Calcule a energia total do sinal $f(t)$ dado pela expressão

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

b) (0.5 ponto) Calcule o módulo do valor médio do sinal $f(t)$ dado pela expressão

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right|.$$

c) (1.0 ponto) Esboce o diagrama de magnitudes de $h(t) = f'(t)\cos(5t)$.

d) (1.0 ponto) Esboce o diagrama de magnitudes de $p(t) = \dfrac{d}{dt}\left(f(t)\cos(5t)\right)$.

Solução: a) Pelo Teorema de Parseval

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-4}^{4} |F(w)|^2 dw \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{4} |F(w)|^2 dw \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^2 |F(w)|^2 dw + \int_2^3 |F(w)|^2 dw + \int_3^4 |F(w)|^2 dw\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^2 (2-w)^2 dw + \int_2^3 (w-2)^2 dw + \int_3^4 (4-w)^2 dw\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{(2-w)^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{(w-2)^3}{3}\right]_2^3 + \left[-\frac{(4-w)^3}{3}\right]_3^4\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3\pi}
\end{aligned}$$

b) Pela definição de transformada de Fourier, temos

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt.$$

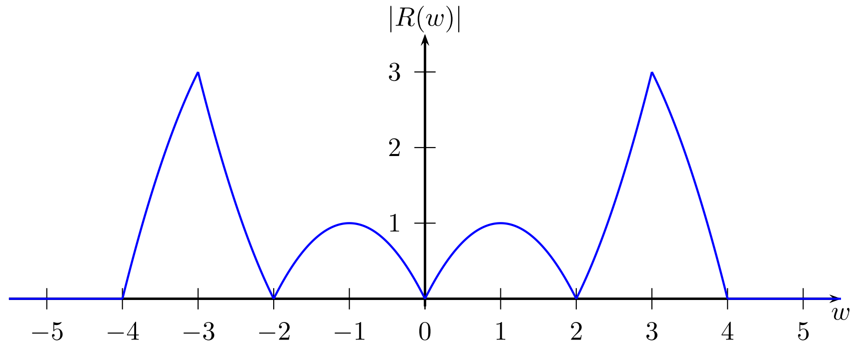
Logo,

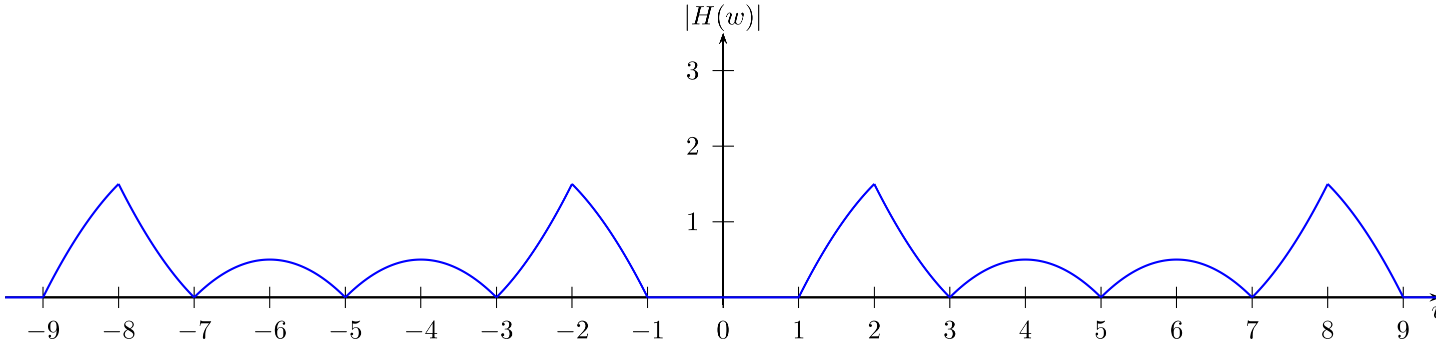
$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

e

$$|F(0)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt\right| = 2.$$

c) Definimos $r(t) = f'(t)$ e $h(t) = r(t)\cos(5t)$. Primeiro esboçamos $|R(w)| = |w||F(w)|$ e depois $|H(w)| = \dfrac{|R(w+5)| + |R(w-5)|}{2}$, onde usamos as propriedades da derivada e da modulação, além do fato de $R(w-5)$ e $R(w+5)$ não ter sobreposição espectral.





d) Defina $q(t) = f(t)\cos(5t)$ e $p(t) = q'(t)$. Pelas propriedades da modulação e derivada, temos $|Q(w)| = \dfrac{|F(w+5)| + |F(w-5)|}{2}$ e $|P(w)| = |w||Q(w)|$.