UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2024/1
Prova da área IIb

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\left\{\alpha f(t) + \beta g(t)\right\} = \alpha\mathcal{F}\left\{f(t)\right\} + \beta\mathcal{F}\left\{g(t)\right\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0,$ então $\mathcal{F}\left\{f'(t)\right\} = iw\mathcal{F}\left\{f(t)\right\}$ Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0,$ então $\mathcal{F}\left\{f''(t)\right\} = -w^2\mathcal{F}\left\{f(t)\right\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(w+ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\left\{f(t-a)\right\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0,$ então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\left\{f(t)\cos(w_0t)\right\} = \frac{1}{2}F(w-w_0) + \frac{1}{2}F(w+w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\left\{(f*g)(t)\right\} = F(w)G(w),$ onde $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F*G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{F(t)\right\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right), \quad a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cos(w_nt) + b_n\,\mathrm{sen}(w_nt)\right]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt,$ $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_nt)dt,$ $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_ne^{iw_nt},$ onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(A(w)\cos(wt) + B(w)\,\mathrm{sen}(wt)\right)dw,$ para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw,$ onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Integrais definidas

1. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \quad (a>0)$	2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \quad (a>0)$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-\lvert m\rvert a} \quad (a>0)$	4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-ma}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}e^{ma}, & m<0 \end{cases}$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r>0)$	8. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a>0)$
9. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \quad (a>0)$	10. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \quad (a>0)$
11. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \quad (a>0)$	12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\mathrm{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $\displaystyle erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(ax)\,\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\le n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\le m) \end{cases}$
17. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \quad (a>0)$	18. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \quad (a>0)$
19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \quad (a>0,\ m\ge 0)$	20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \quad (a>0,\ m>0)$
21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \quad (a>0,\ m\ge 0)$	22. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a>0)$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$	$\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) = \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$	$\mathrm{sen}(x)\cos(y) = \dfrac{\mathrm{sen}(x+y)+\mathrm{sen}(x-y)}{2}$

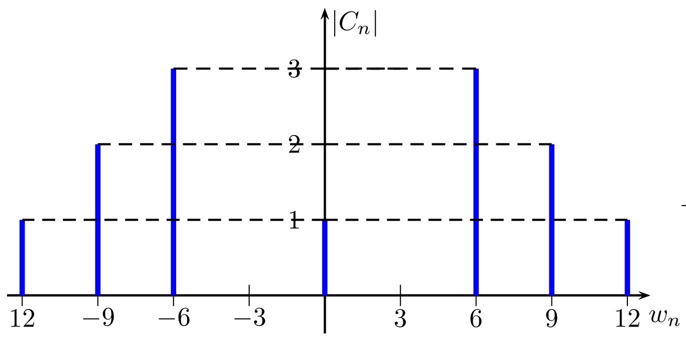
Frequências das notas musicais em hertz:

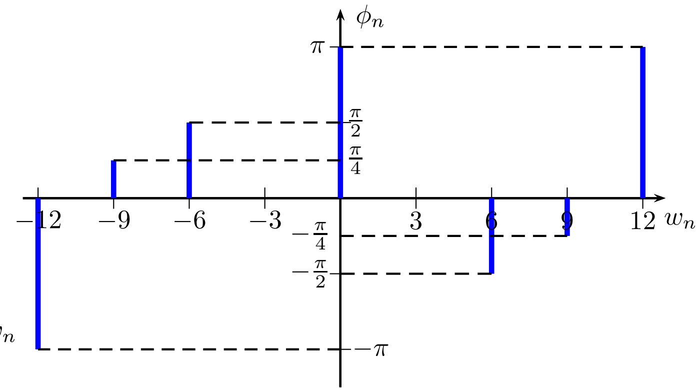
Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\displaystyle\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\displaystyle\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\displaystyle\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$
$\displaystyle\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\displaystyle\int x^2\cos(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\cos(\lambda x)+(\lambda^2x^2-2)\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^3}+C$
$\displaystyle\int x^2\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)+(2-\lambda^2x^2)\cos(\lambda x)}{\lambda^3}+C$

• **Questão 1** (2.5 pontos) Considere os diagramas de espectro de uma função periódica dado pelos gráficos abaixo.





a) (1.0 ponto) Preencha a tabela abaixo.

n	0	1	2	3	4	5
w_n						
C_n						
a_n						
b_n						

b) (1.0 ponto) Escreva as formas trigonométrica e exponencial da série de Fourier abaixo:

Forma trigonométrica	
Forma exponencial	

c) (0.5 ponto) Calcule a potência média dada por

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

Solução:

a)

n	0	1	2	3	4	5
w_n	0	3	6	9	12	15
C_n	-1	0	$-3i$	$\sqrt{2}-\sqrt{2}i$	-1	0
a_n	-2	0	0	$2\sqrt{2}$	-2	0
b_n	0	0	6	$2\sqrt{2}$	0	0

b)

Forma trigonométrica	$f(t) = -1 + 6\,\text{sen}(6t) + 2\sqrt{2}\cos(9t) + 2\sqrt{2}\,\text{sen}(9t) - 2\cos(12t)$
Forma exponencial	$f(t) = -e^{-12it} + (\sqrt{2}+i\sqrt{2})e^{-9it} + 3ie^{-6it} - 1 - 3ie^{6it} + (\sqrt{2}-i\sqrt{2})e^{9it} - e^{12it}$

c)

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = (1^2+2^2+3^2+1^2+3^2+2^2+1^2) = 1+4+9+1+9+4+1 = 29.$$

• **Questão 2** (2.0 pontos) Considere a função periódica dada por

$$f(t) = |1 + 2\cos(t)|$$

a) (0.5 ponto) Esboce o gráfico da função $f(t)$.

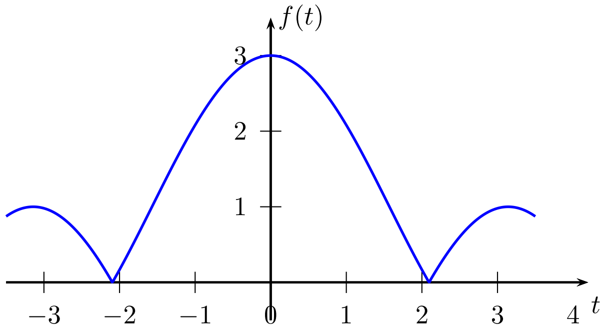
b) (1.5 pontos) Calcule a_0, a_1 e b_1.

Dica: Observe que uma forma alternativa de escrever a função é dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 + 2\cos(t), & -\frac{2\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3} \\ -1 - 2\cos(t), & -\pi < t < -\frac{2\pi}{3} \quad ou \quad \frac{2\pi}{3} < t < \pi \end{cases}$$

e $f(t+2\pi) = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Solução:



a)

b) A função $f(t)$ é par, portanto $b_1 = 0$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{2\pi/3}(1+2\cos(t))dt + \int_{2\pi/3}^{\pi}(-1-2\cos(t))dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\pi}{3} + 2\left[\operatorname{sen}(t)\right]_0^{2\pi/3} - \frac{\pi}{3} - 2\left[\operatorname{sen}(t)\right]_{2\pi/3}^{\pi}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right] \\
&= \frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{2\pi/3}(1+2\cos(t))\cos(t)dt + \int_{2\pi/3}^{\pi}(-1-2\cos(t))\cos(t)dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{2\pi/3}(\cos(t)+2\cos^2(t))dt + \int_{2\pi/3}^{\pi}(-\cos(t)-2\cos^2(t))dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{2\pi/3}(\cos(t)+1+\cos(2t))dt + \int_{2\pi/3}^{\pi}(-\cos(t)-1-\cos(2t))dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left[(\operatorname{sen}(t)+t+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t))\right]_0^{2\pi/3} + \left[(-\operatorname{sen}(t)-t-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t))\right]_{2\pi/3}^{\pi}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\pi} + \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

• **Questão 3** (2.5 pontos) Considere a função

$$
F(w) = \begin{cases} 1, & -1100\pi \le w \le 1100\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}
$$

e a função

$$
g(t) = 4\cos(1568\pi t) + 2\cos(2352\pi t) + 3\cos(3136\pi t).
$$

Neste exercício, as frequência estão dadas em radianos por segundo. Responda os itens.

a) (0.5 ponto) Calcule $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)\}$.

b) (0.25 ponto) Mostre que $\mathcal{F}^{-1}\{\pi\delta(w-w_0)+\pi\delta(w+w_0)\} = \cos(w_0 t)$

c) (0.75 ponto) Calcule $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$.

d) (1.0 ponto)Marque em cada coluna quais são as notas $g(t)$, $f(t)*g(t)$ e $f(t)*g(t/3)$.

(0.3 ponto) $g(t)$	(0.3 ponto) $(f(t)*g(t))$	(0.4 ponto) $(f(t)*g(t/3))$
( ) Sol na escala 3	( ) Sem som $((f*g)(t)=0)$	( ) Sem som $(f(t)*g(t/3)=0$
( ) Sol na escala 4	( ) Sol na escala 5	( ) Dó na escala 2
( ) Sol na escala 5	( ) Sol na escala 6	( ) Dó na escala 3
( ) Sol na escala 6	( ) Lá na escala 5	( ) Dó na escala 4
( ) Sol na escala 7	( ) Lá na escala 6	( ) Dó na escala 5

Solução:

a)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{itw}dw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1100\pi}^{1100\pi} e^{itw}dw \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{1100\pi} \cos(tw)dw \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\text{sen}(tw)}{t}\right]_0^{1100\pi} \\ &= \frac{\text{sen}(1100\pi t)}{\pi t}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\pi\delta(w-w_0)+\pi\delta(w+w_0))e^{itw}dw &= \frac{e^{iw_0t}+e^{-iw_0t}}{2} \\ &= \cos(w_0t). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} G(w) &= \mathcal{F}\{4\cos(1568\pi t)+2\cos(2352\pi t)+3\cos(3136\pi t)\} \\ &= 4\mathcal{F}\{\cos(1568\pi t)\}+2\mathcal{F}\{\cos(2352\pi t)\}+3\mathcal{F}\{\cos(3136\pi t)\} \\ &= 4\pi\delta(w-1568\pi)+4\pi\delta(w+1568\pi)+2\pi\delta(w-2352\pi)+2\pi\delta(w+2352\pi)+3\pi\delta(w-3136\pi)+3\pi\delta(w+3136\pi) \end{aligned}$$

d)

(0.3 ponto) $g(t)$

( ) Sol na escala 3

(X) Sol na escala 4

( ) Sol na escala 5

( ) Sol na escala 6

( ) Sol na escala 7

(0.3 ponto) $(f(t) * g(t))$

(X) Sem som ($(f * g)(t) = 0$)

( ) Sol na escala 5

( ) Sol na escala 6

( ) Lá na escala 5

( ) Lá na escala 6

(0.4 ponto) $(f(t) * g(t/3))$

( ) Sem som $(f(t) * g(t/3) = 0$

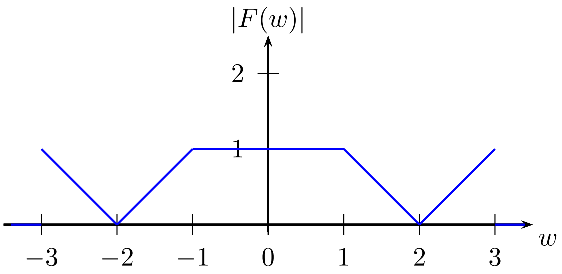
( ) Dó na escala 2

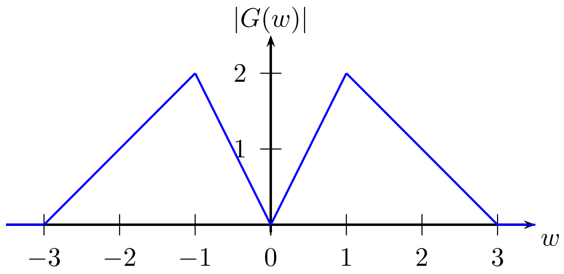
(X) Dó na escala 3

( ) Dó na escala 4

( ) Dó na escala 5

• **Questão 4** (3.0 pontos) Considere os diagramas de espectro de magnitudes de duas funções $f(t)$ e $g(t)$, respectivamente, dados nos gráficos abaixo.





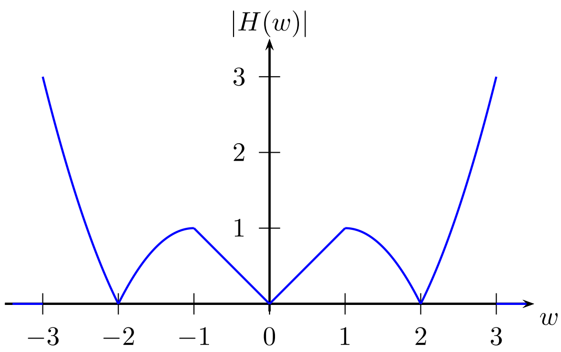
a) (0.8 ponto) Esboce o diagrama de espectro de magnitudes da função $h(t) = f'(t)$.

b) (0.8 ponto) Esboce o diagrama de espectro de magnitudes da função $p(t) = g(2t)$.

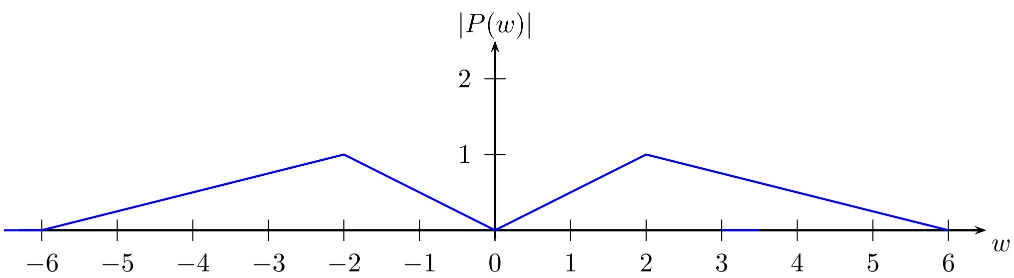
c) (0.9 ponto) Esboce o diagrama de espectro de magnitudes da função $q(t) = f(t) * p(t)$.

d) (0.5 ponto) Explique o motivo de não ser possível fazer o diagrama de magnitudes de $r(t) = h(t)\cos(t)$.

Solução:

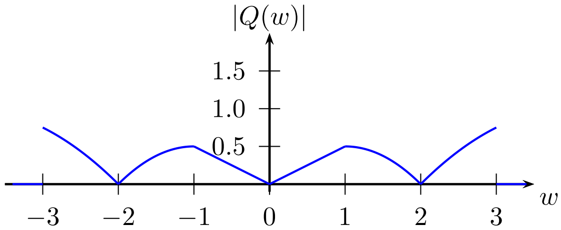


a)



b)

b)



d) Não é possível devido a sobreposição espectral.