UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2024/2
Prova da área IIb

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2}F(w - w_0) + \frac{1}{2}F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right), \quad a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t)\right]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_n t)dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}$, onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(A(w)\cos(wt) + B(w)\operatorname{sen}(wt)\right)dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$, onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Integrais definidas

1. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-\lvert m\rvert a} \qquad (a>0)$	4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-ma}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}e^{ma}, & m<0 \end{cases}$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$
11. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\mathrm{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $\displaystyle erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(ax)\,\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\le n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\le m) \end{cases}$
17. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$
19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\ge 0)$	20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$
21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\ge 0)$	22. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$	$\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) = \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$	$\mathrm{sen}(x)\cos(y) = \dfrac{\mathrm{sen}(x+y)+\mathrm{sen}(x-y)}{2}$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\displaystyle\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\displaystyle\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\displaystyle\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$
$\displaystyle\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\displaystyle\int x^2\cos(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\cos(\lambda x)+(\lambda^2x^2-2)\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^3}+C$
$\displaystyle\int x^2\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)+(2-\lambda^2x^2)\cos(\lambda x)}{\lambda^3}+C$

- **Questão 1** (2.5 pontos) Considere a função periódica dada por

$$f(t) = 8\cos^2(t) + 16\,\mathrm{sen}^3(2t)$$

Responda os itens abaixo.

a) (1.0 ponto) Considere a série de Fourier trigonométrica dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + b_n\,\mathrm{sen}(w_n t).$$

Preencha as tabelas abaixo com os coeficientes de Fourier a_n e b_n e com o período T e a frequência angular fundamental w_1.

n	0	1	2	3
a_n				
b_n				

T	
w_1	

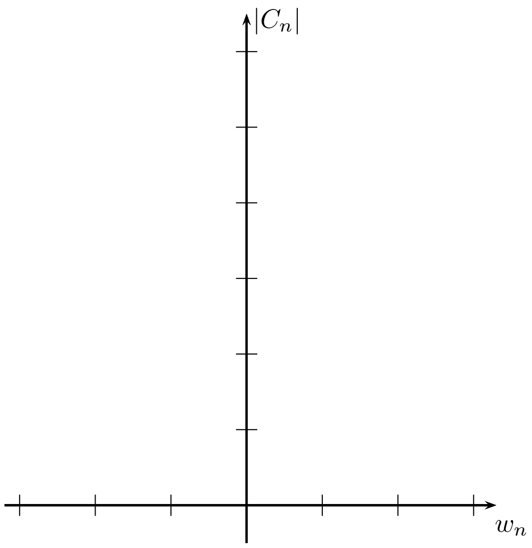
b) (1.0 ponto) Considere a série de Fourier exponencial dada por

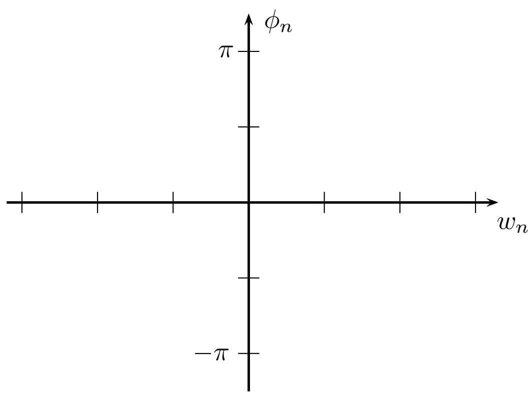
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t}.$$

Preencha a tabela abaixo com os coeficientes de Fourier C_n, com o módulo $|C_n|$ e com a fase ϕ_n.

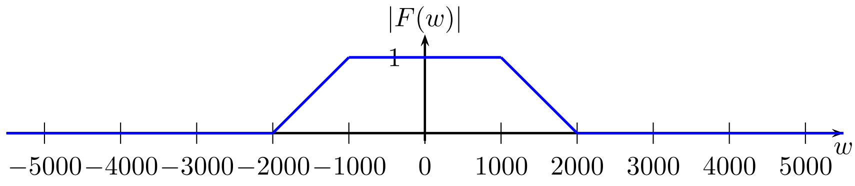
n	-3	-2	-1	0	1	2	3
C_n							
$\lvert C_n \rvert$							
ϕ_n							

c) (0.5 ponto) Esboce os diagramas de espectro de magnitudes e fases nos espaços indicados abaixo. Complete as escalas em cada eixo do gráfico.





• **Questão 2** (3.0 pontos) O gráfico abaixo apresenta a magnitude da transformada de Fourier da função $f(t)$.



a) (0.6) É possível calcular $f(t)$ usando o gráfico acima? Justifique sua resposta.

b) (0.6) Trace o diagrama de magnitudes da transformada de $g(t) = f(t)\cos(3000t)$.

c) (0.6) Trace o diagrama de magnitudes da transformada de $g(t) = f\left(\frac{t}{2}\right)$.

d) (0.6) É possível traçar o diagrama de magnitudes da transformada de $g(t) = f(t)\cos(1000t)$? Justifique sua resposta

e) (0.6) Marque a resposta que pode ser deduzida a partir do diagrama de magnitudes:
( ) A função $f(t)$ é periódica.
( ) A função $f(t)$ é nula para $|t| \geq 2000$.
( ) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$
( ) $\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\right| = 1$
( ) nenhuma das respostas anteriores.

- **Questão 3** (2.0 pontos) Calcule a série de Fourier da função 2π-periódica $f(t)$ dada por

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \begin{cases} \operatorname{sen}(t), & -\dfrac{\pi}{2} < t \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < t \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \\
f(t+2\pi) &= f(t), \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

• **Questão 4** (2.5 pontos) Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} t^2 e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Responda o que se pede.

a) (1.0 ponto) Use a definição da transformada de Fourier calcular $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

b) (0.25 ponto) Use a definição da transformada inversa de Fourier calcular $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(w)\}$.

c) (0.5 ponto) Calcule a função $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)e^{-2iw}\}$

d) (0.75 ponto) Calcule a função $p(t) = \mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(w)F(w)\}$