UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2024/2
Prova da área IIb

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} = \frac{1}{2}F(w-w_0) + \frac{1}{2}F(w+w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f*g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F*G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(w)\rvert^2dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(w_nt) + b_n\operatorname{sen}(w_nt)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_nt)dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(w_nt)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_ne^{iw_nt}$, onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(w)\cos(wt) + B(w)\operatorname{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{iwt}dw$, onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Integrais definidas

1. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-\lvert m\rvert a} \qquad (a>0)$	4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-ma}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}e^{ma}, & m<0 \end{cases}$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$
11. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\operatorname{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $\displaystyle erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(ax)\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\le n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\le m) \end{cases}$
17. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$
19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\ge 0)$	20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$
21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\ge 0)$	22. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$	$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$	$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\displaystyle\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\displaystyle\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\displaystyle\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$
$\displaystyle\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\displaystyle\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\displaystyle\int x^2\cos(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\cos(\lambda x)+(\lambda^2x^2-2)\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^3}+C$
$\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)+(2-\lambda^2x^2)\cos(\lambda x)}{\lambda^3}+C$

• **Questão 1** (2.5 pontos) Considere a função periódica dada por

$$f(t) = 8\cos^2(t) + 16\,\text{sen}^3(2t)$$

Responda os itens abaixo.

a) (1.0 ponto) Considere a série de Fourier trigonométrica dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + b_n\,\text{sen}(w_n t).$$

Preencha as tabelas abaixo com os coeficientes de Fourier a_n e b_n e com o período T e a frequência angular fundamental w_1.

n	0	1	2	3
a_n				
b_n				

T	
w_1	

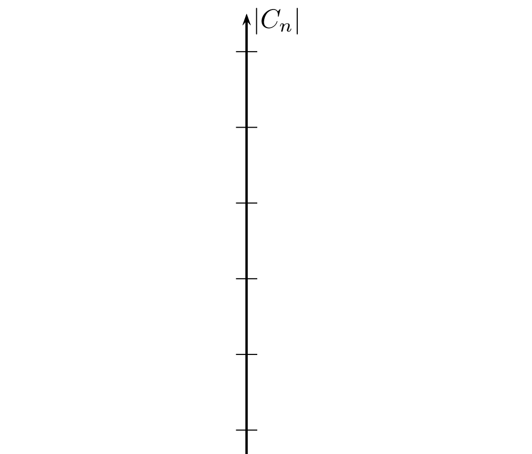
b) (1.0 ponto) Considere a série de Fourier exponencial dada por

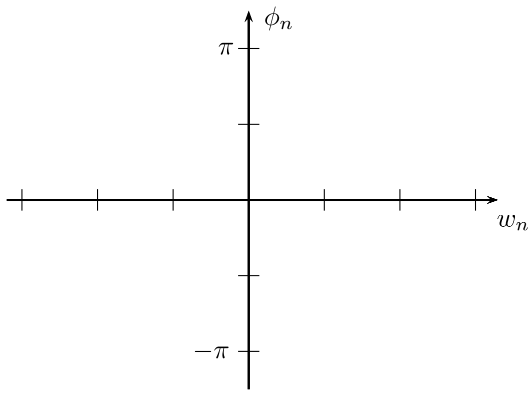
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}.$$

Preencha a tabela abaixo com os coeficientes de Fourier C_n, com o módulo $|C_n|$ e com a fase ϕ_n.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
C_n							
$\|C_n\|$							
ϕ_n							

c) (0.5 ponto) Esboce os diagramas de espectro de magnitudes e fases nos espaços indicados abaixo. Complete as escalas em cada eixo do gráfico.





Solução:

a)

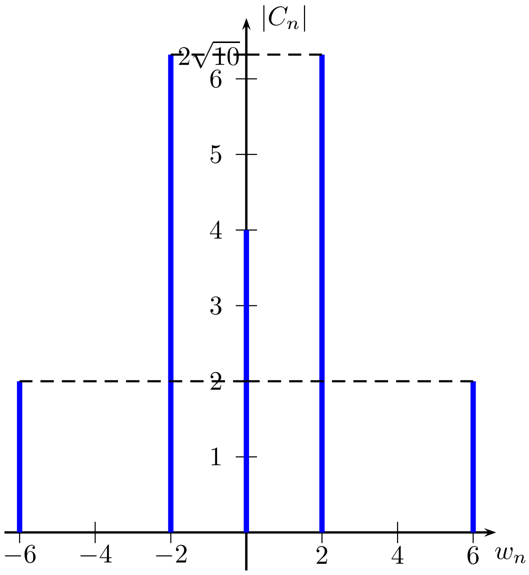
$$\begin{aligned}
f(t) &= 8\cos^2(t) + 16\,\text{sen}^3(2t) \\
&= 8\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 + 16\left(\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}\right)^3 \\
&= 8\left(\frac{e^{2it}+2e^{it}e^{-it}+e^{-2it}}{4}\right) + 16\left(\frac{e^{6it}-3e^{4it}e^{-2it}+3e^{2it}e^{-4it}-e^{-6it}}{8i^3}\right) \\
&= 8\left(\frac{2+e^{2it}+e^{-2it}}{4}\right) + 16\left(\frac{e^{6it}-e^{-6it}-3e^{2it}+3e^{-2it}}{-8i}\right) \\
&= 4+4\left(\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right) - 4\left(\frac{e^{6it}-e^{-6it}}{2i}\right) + 12\left(\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}\right) \\
&= 4+4\cos(2t)+12\,\text{sen}(2t)-4\,\text{sen}(6t)
\end{aligned}$$

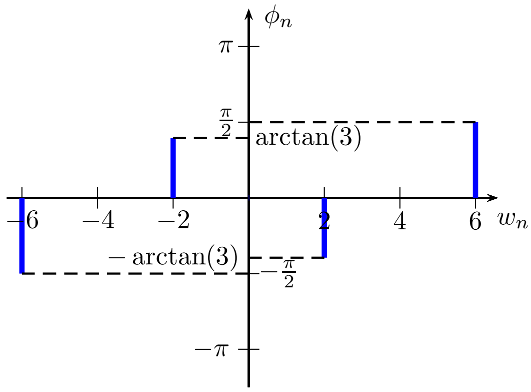
n	0	1	2	3
a_n	8	4	0	0
b_n	0	12	0	-4

T	π
w_1	2

b) Usamos a expressão $C_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ para $n \geq 0$ e $C_{-n} = \overline{C_n}$.

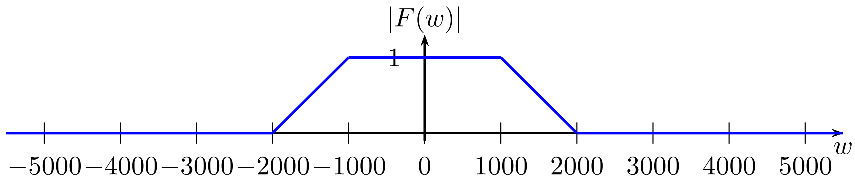
n	-3	-2	-1	0	1	2	3
C_n	$-2i$	0	$2+6i$	4	$2-6i$	0	$2i$
$\lvert C_n \rvert$	2	0	$2\sqrt{10}$	4	$2\sqrt{10}$	0	2
ϕ_n	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\arctan(3)$	0	$-\arctan(3)$	0	$\dfrac{\pi}{2}$





c)

• **Questão 2** (3.0 pontos) O gráfico abaixo apresenta a magnitude da transformada de Fourier da função $f(t)$.



a) (0.6) É possível calcular $f(t)$ usando o gráfico acima? Justifique sua resposta.

b) (0.6) Trace o diagrama de magnitudes da transformada de $g(t) = f(t)\cos(3000t)$.

c) (0.6) Trace o diagrama de magnitudes da transformada de $g(t) = f\left(\frac{t}{2}\right)$.

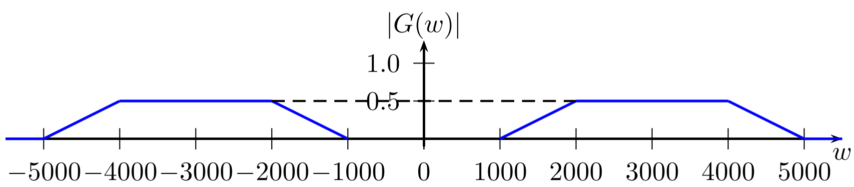
d) (0.6) É possível traçar o diagrama de magnitudes da transformada de $g(t) = f(t)\cos(1000t)$? Justifique sua resposta

e) (0.6) Marque a resposta que pode ser deduzida a partir do diagrama de magnitudes:
( ) A função $f(t)$ é periódica.
( ) A função $f(t)$ é nula para $|t| \geq 2000$.
( ) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$
( ) $\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\right| = 1$
( ) nenhuma das respostas anteriores.

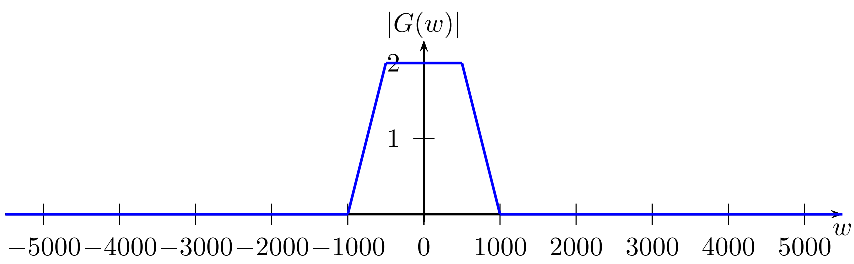
Solução:

a) Para calcular a função $f(t)$, precisamos ter a transformada da $f(t)$, ou seja, $F(w)$. Mas o gráfico só apresenta o módulo $|F(w)|$, faltando a fase. Portanto, não é possível calcular $f(t)$.

b) Usando o propriedade da modulação, temos $G(w) = \frac{F(w+3000)+F(w-3000)}{2}$. Como não há sobreposição espectral, podemos calcular o módulo da forma $|G(w)| = \frac{|F(w+3000)|+|F(w-3000)|}{2}$.



c) Usando o propriedade da mudança de escala, temos $G(w) = 2F(2w)$. Portanto, $|G(w)| = 2|F(2w)|$.



d) Usando o propriedade da modulação, temos $G(w) = \frac{F(w+1000)+F(w-1000)}{2}$. Como há sobreposição espectral, não conseguimos calcular o módulo $|G(w)|$, pois quando temos dois números complexos não nulos, vale a desigualdade triangular $G(w) \leq \frac{|F(w+1000)|+|F(w-1000)|}{2}$, sendo que a igualdade sempre é válida quando um dos números complexos da soma é zero, ou seja, quando não há sobreposição espectral (item b)). Portanto, não é possível traçar o diagrama de magnitudes de $g(t) = f(t)\cos(1000t)$.

e) Uma função $f(t)$ é periódica quando o espectro é discreto, o que não é o caso. Também,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw = \int_{-2000}^{2000} e^{iwt}dw = 2\int_{0}^{2000} \cos(wt)dw = \frac{\text{sen}(2000t)}{t}$$

não é nula para $|t| \geq 2000$. Temos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\cdot 0\cdot t}dt = F(0).$$

No gráfico, não temos $F(0)$, mas temos

$$|F(0)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\right| = 1.$$

• **Questão 3** (2.0 pontos) Calcule a série de Fourier da função 2π-periódica $f(t)$ dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} \operatorname{sen}(t), & -\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < t \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \\ f(t+2\pi) &= f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Solução:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t),$$

onde $w_n = \frac{2\pi}{2\pi} n = n$. Os coeficientes a_n, $n = 0, 1, 2, ...$, são todos zero, pois a função é ímpar. Então, vamos calcular os coeficientes b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(w_n t) dt \\ &= \frac{4}{2\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(w_n t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos(t-nt) - \cos(t+nt)}{2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen}(t(1-n))}{1-n} - \frac{\operatorname{sen}(t(1+n))}{1+n} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(1-n)\right)}{1-n} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(1+n)\right)}{1+n} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{1-n} - \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{1+n} \right) \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi} \left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{1+n} \right) \\ &= \frac{2n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi(1-n^2)} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{2n(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi(1-n^2)}, & \text{se } n \text{ par} \end{cases} \end{aligned}$$

• **Questão 4** (2.5 pontos) Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} t^2e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Responda o que se pede.

a) (1.0 ponto) Use a definição da transformada de Fourier calcular $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

b) (0.25 ponto) Use a definição da transformada inversa de Fourier calcular $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(w)\}$.

c) (0.5 ponto) Calcule a função $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)e^{-2iw}\}$

d) (0.75 ponto) Calcule a função $p(t) = \mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(w)F(w)\}$

Solução:

a)

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} t^2e^{-t}e^{-iwt}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} t^2e^{-t}\cos(wt)dt - i\int_{0}^{\infty} t^2e^{-t}\operatorname{sen}(wt)dt \\ &= \frac{2(1-3w^2)}{(1+w^2)^3} - i\frac{2w(3-w^2)}{(1+w^2)^3}, \end{aligned}$$

onde foram usadas as propriedades 17 e 18.

b)

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w)e^{iwt}dw \\ &= e^0 = 1. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(w)e^{-2iw}\} \\ &= f(t-2) \\ &= \begin{cases} (t-2)^2e^{-(t-2)}, & (t-2) \geq 0 \\ 0, & (t-2) < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (t-2)^2e^{-(t-2)}, & t \geq 2 \\ 0, & t < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} p(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(w)F(w)\} \\ &= 1 * f(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \\ &= \int_{0}^{\infty} t^2e^{-t}dt \\ &= \left[-t^2e^{-t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -2te^{-t}dt \\ &= 2\int_0^{\infty} te^{-t}dt \\ &= 2\left(\left[-te^{-t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t}dt\right) \\ &= 2\int_0^{\infty} e^{-t}dt \\ &= 2\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Alternativamente, pode-se fazer usando a definição

$$\begin{aligned} p(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(w)F(w)\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w)F(w)e^{iwt}dw \\ &= F(0) \\ &= \frac{2(1-3\cdot 0^2)}{(1+0^2)^3} - i\frac{2\cdot 0(3-0^2)}{(1+0^2)^3} \\ &= 2. \end{aligned}$$