UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma B - 2024/2
Prova da área IIB

1 - 3	4	5	Total

Nome: GABARITO **Cartão:** ____________

Questão 1. Considere $f(t) = \text{sen}^2(3t) + \cos(4t) + \cos(6t)$. Está correto:

(A)(0.8pt) Sobre o período fundamental:

( ) 2

( ) 2π

(X) π

( ) 3π

( ) $\dfrac{2\pi}{3}$

( ) nenhuma das alternativas anteriores

(B)(0.8pt) Sobre a frequência angular fundamental:

( ) 2π

(X) 2

( ) π

( ) 3

( ) 1

( ) nenhuma das alternativas anteriores

Solução: aplicando Identidades Trigonométricas (formulário) para $x = y$,

(A) $f(t) = \dfrac{1-\cos(6t)}{2} + \cos(4t) + \cos(6t) = \dfrac{1}{2} + \cos(4t) + \dfrac{\cos(6t)}{2}$ assim a frequência angular fundamental é $w = 2$ (o m.d.c entre 4 e 6) e o período (fundamental) é $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

Questão 2. Considere $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\cos^2(\pi n t)$ e sua série de Fourier na forma trigonométrica. Em cada item marque a alternativa correta.

(A)(0.8pt) Sobre o período fundamental:

( ) 2

(X) 1

( ) $\dfrac{1}{2}$

( ) $\dfrac{1}{\pi}$

( ) nenhuma das alternativas anteriores

(B)(0.8pt) Sobre o coeficiente a_0:

( ) 2

( ) 0

( ) 4

(X) 1

( ) $\dfrac{1}{2}$

( ) nenhuma das alternativas anteriores

(C)(0.8pt) Sobre a_n e b_n, para $n \geq 1$:

(X) $a_n = 2^{-(n+1)}$, $b_n = 0$

( ) $a_n = 2^{-n}$, $b_n = 0$

( ) $a_n = \begin{cases} 2^{-n} & , n \text{ par} \\ 0 & , n \text{ ímpar} \end{cases}$ $, b_n = 0$

( ) $a_n = 0, b_n = \begin{cases} 2^{-n} & , n \text{ par} \\ 0 & , n \text{ ímpar} \end{cases}$

( ) nenhuma das alternativas anteriores

(D)(0.8pt) Sobre $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt$:

( ) 0

(X) $\dfrac{1}{2}$

( ) 4

( ) 2

( ) nenhuma das alternativas anteriores

Solução: usa que $2^{-n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ e que seu somatório é a soma de uma progressão geométrica infinita convergente

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\frac{1+\cos(2\pi n t)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\cos(2\pi n t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1/2}{1-1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-1}2^{-n}\cos(2\pi n t) =$$
$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)}\cos(2\pi n t)$$

então $w = 2\pi$ e $T = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$, e ainda $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt = \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Questão 3. Sejam $f(t) = te^{-|t|}$, $u(\cdot)$ função degrau unitário, $i = \sqrt{-1}$, $\mathcal{F}\{\cdot\}$ a transformada de Fourier.

(A)(0.8pt) Sobre $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ é correto:

(X) $\dfrac{-4iw}{(1+w^2)^2}$

( ) $\dfrac{-2iw}{(1+w^2)^2}$

( ) $\dfrac{-2w}{(1+w^2)^2}$

( ) $\dfrac{1-w^2}{(1+w^2)^2}$

( ) $\dfrac{2w}{(1+w^2)^2}$

( ) nenhuma das alternativas anteriores

(B) Sobre $G(w) = \mathcal{F}\{f(t)u(t)\}$ é correto:

( ) $\dfrac{1+2iw-w^2}{(1+w^2)^2}$

( ) $\dfrac{1-w^2}{(1+w^2)^2}$

( ) $\dfrac{-2iw}{(1+w^2)^2}$

(X) $\dfrac{1-2iw-w^2}{(1+w^2)^2}$

( ) $\dfrac{2w}{(1+w^2)^2}$

( ) nenhuma das alternativas anteriores

Solução: usa que $te^{-|t|}$ é uma função ímpar, e as linhas 9 e 11 da tabela de integrais

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} te^{-|t|}e^{-iwt}dt = -2i\int_0^{\infty} te^{-t}\operatorname{sen}(wt)dt = -2i\cdot\frac{2(1)w}{(1^2+w^2)^2} = -\frac{4iw}{(1+w^2)^2}$$

$$G(w) = \int_0^{\infty} te^{-t}e^{-iwt}dt = \int_0^{\infty} te^{-t}\cos(wt)dt - i\int_0^{\infty} te^{-t}\operatorname{sen}(wt)dt = \frac{1-w^2}{(1^2+w^2)^2} - i\frac{2(1)w}{(1^2+w^2)^2}$$

Questão 4. Considere o problema de difusão de calor $\begin{cases} 4u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = \delta(x-1) \end{cases}$

(A)(1.0pt) apresente o problema de valor inicial que sua transformada de Fourier $U(\cdot,t)$ deve satisfazer, e então obtenha expressão analítica para $U(\cdot,t)$

(B)(0.8pt) obtenha $u(x,t)$ como transformada inversa da expressão do ítem anterior.

Solução: (A)

$4U_t = (ik)^2U = -k^2U \Rightarrow U_t = -\dfrac{k^2}{4}U \Rightarrow U(k,t) = U(k,0)e^{-\frac{k^2t}{4}}$

Por outro lado $U(k,0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-1)e^{-ikx}dx = e^{-ik}$ implica $U(k,t) = e^{-ik}e^{-\frac{k^2t}{4}}$

(B) Dessa forma,

$$\mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{-\frac{k^2t}{4}}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2t}{4}}e^{ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2t}{4}}(\cos(kx) + i\operatorname{sen}(kx))dk$$

e como consequência da paridade de $e^{-\frac{k^2t}{4}}$ em relação a k,

$$\mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{-\frac{k^2t}{4}}\right] = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{k^2t}{4}}\cos(kx)dk = \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}/2}e^{-\frac{x^2}{4t/4}} = \frac{e^{-x^2/t}}{\sqrt{\pi t}}$$

Finalmente, pela propriedade da translação, $u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{-ik}e^{-\frac{k^2t}{4}}\right] = \left.\dfrac{e^{-x^2/t}}{\sqrt{\pi t}}\right|_{x=x-1} = \dfrac{e^{-\frac{(x-1)^2}{t}}}{\sqrt{\pi t}}$

Questão 5. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = -u, \text{ para todos } x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0) = f(x), x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

(A) (0.8pt) Obtenha a transformada de Fourier $F(\cdot)$ de $f(x) = e^{-|x|}, x\in\mathbb{R}$

(B) (1.0pt) Encontre a solução $u(x,t)$ (e a respectiva transformada de Fourier $U(\cdot,t)$) do problema do enunciado para $f(x)$ conforme definida no ítem anterior.

Solução: (*) como consequência da paridade de $e^{-|x|}$

$$\text{(A) } F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-iwx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}(\cos(wx) - i\operatorname{sen}(wx))dx \overset{*}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\cos(wx)dx \overset{*}{=} 2\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(wx)dx$$

e assim

$$F(w) = 2\frac{1}{1+w^2} = \frac{2}{1+w^2}.$$

(B) Aplicando a transformada de Fourier na variável x

$$U_t + 2iwU = -U \Rightarrow U_t = (-1-2iw)U \Rightarrow U(w,t) = U(w,0)e^{-(1+2iw)t}$$

onde $U(w,0) = \mathcal{F}(f(x))$ foi obtido no subítem (A) desta questão.

Assim temos $U(w,t) = e^{-t}F(w)e^{-2iwt}$, o que implica

$$u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{-t}F(w)e^{-2iwt}\right] = e^{-t}\mathcal{F}_x^{-1}\left[F(w)e^{-2iwt}\right] = e^{-t}f(x-2t) = e^{-t}e^{-|x-2t|}$$

□