UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2025/1
Prova da área IIb

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w+ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} = \frac{1}{2}F(w-w_0) + \frac{1}{2}F(w+w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f*g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F*G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cos(w_nt) + b_n\operatorname{sen}(w_nt)\right]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_nt)dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(w_nt)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_ne^{iw_nt}$, onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(A(w)\cos(wt) + B(w)\operatorname{sen}(wt)\right)dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$, onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Integrais definidas

1. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-\lvert m\rvert a} \qquad (a>0)$	4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{-ma}, & m>0\\ 0, & m=0\\ -\frac{\pi}{2}e^{ma}, & m<0\end{cases}$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2}, & n<m\\ \frac{\pi}{4}, & n=m,\\ 0, & n>m\end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2}, & m>0\\ 0, & m=0\\ -\frac{\pi}{2}, & m<0\end{cases}$
7. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$
11. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\mathrm{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $\displaystyle erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(ax)\,\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{4}, & (0<m<2a)\\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m)\\ 0, & (0<2a<m)\end{cases}$	16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases}\frac{\pi m}{2}, & (0<m\le n)\\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\le m)\end{cases}$
17. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$
19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\ge 0)$	20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$
21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\ge 0)$	22. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$	$\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) = \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$	$\mathrm{sen}(x)\cos(y) = \dfrac{\mathrm{sen}(x+y)+\mathrm{sen}(x-y)}{2}$

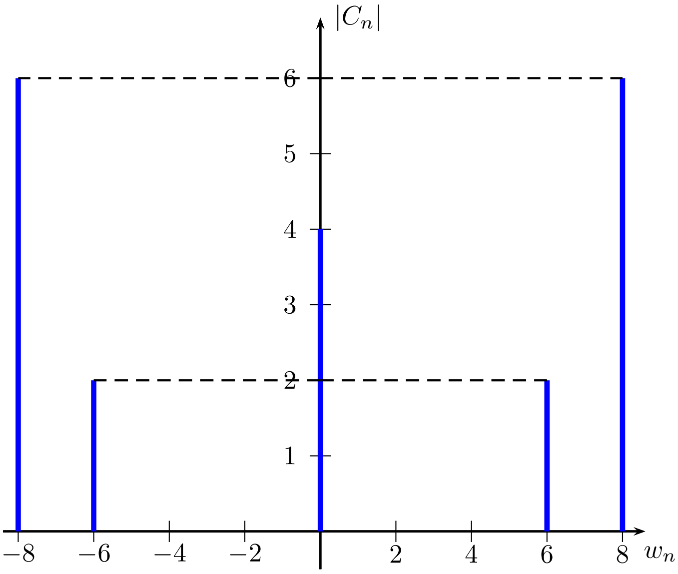
Frequências das notas musicais em hertz:

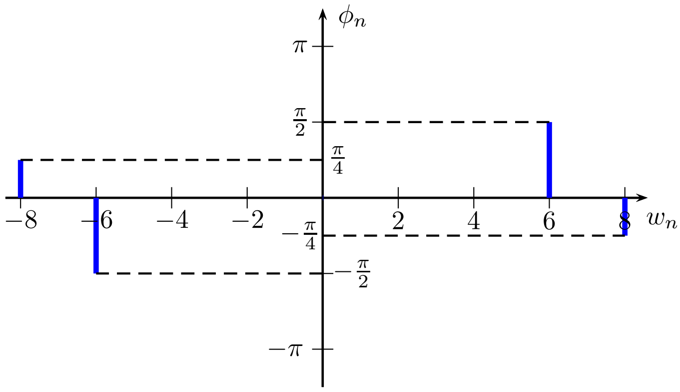
Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\displaystyle\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\displaystyle\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\displaystyle\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$
$\displaystyle\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\displaystyle\int x^2\cos(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\cos(\lambda x)+(\lambda^2x^2-2)\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^3}+C$
$\displaystyle\int x^2\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)+(2-\lambda^2x^2)\cos(\lambda x)}{\lambda^3}+C$

• **Questão 1** (2.5 pontos) Considere a função T-periódica $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}$ cujos diagramas de espectro são dados nos gráficos abaixo.





a) (0.5 ponto) Calcule o período fundamental e a frequência angular fundamental da função $f(t)$

b) (2.0 ponto) Escreva a função $f(t)$ em termos de senos e cossenos.

Solução: a) A frequência angular fundamental é $w = 2$, por que 2 é o maior divisor comum de 6 e 8. Portanto, o período fundamental é $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Solução: b) Os coeficientes dados no gráficos são

n	0	1	2	3	4
$\|C_n\|$	4	0	0	2	6
ϕ_n	0	0	0	$\frac{\pi}{2}$	-$\frac{\pi}{4}$
C_n	4	0	0	$2e^{i\pi/2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i$	$6e^{-i\pi/4} = 6\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 6i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$

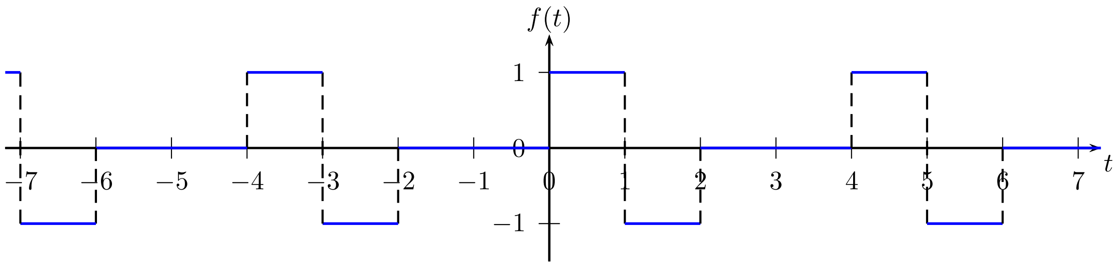
onde $C_n = |C_n|e^{i\phi_n}$. Como $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, temos:

$$C_0 = \frac{a_0 - ib_0}{2} = 4 \Rightarrow a_0 = 8 \text{ e } b_0 = 0.$$
$$C_1 = \frac{a_1 - ib_1}{2} = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \text{ e } b_1 = 0.$$
$$C_2 = \frac{a_2 - ib_2}{2} = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \text{ e } b_2 = 0.$$
$$C_3 = \frac{a_3 - ib_3}{2} = 2i \Rightarrow a_3 = 0 \text{ e } b_3 = -4.$$
$$C_4 = \frac{a_4 - ib_4}{2} = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} \Rightarrow a_4 = 6\sqrt{2} \text{ e } b_4 = 6\sqrt{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + b_3\,\text{sen}(w_3 t) + a_4\cos(w_4 t) + b_4\,\text{sen}(w_4 t) \\ &= 4 - 4\,\text{sen}(6t) + 6\sqrt{2}\cos(8t) + 6\sqrt{2}\,\text{sen}(8t). \end{aligned}$$

• **Questão 2** (2.5 pontos) Calcule a série de Fourier da função periódica dada no gráfico abaixo. Escreva os primeiros seis termos não nulos da série.



Solução: O período é $T = 4$. Logo, $w_n = \dfrac{2\pi n}{4} = \dfrac{\pi n}{2}$. Vamos calcular a_0, a_n e b_n.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{4}\int_0^4 f(t)dt \\ &= \frac{2}{4}\left(\int_0^1 1dt + \int_1^2 (-1)dt\right) \\ &= \frac{2}{4}(1-1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 f(t)\cos(w_n t)dt \\ &= \frac{2}{4}\left(\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi n}{2}t\right)dt + \int_1^2 (-1)\cos\left(\frac{\pi n}{2}t\right)dt\right) \\ &= \frac{2}{4}\left(\left[\frac{2}{\pi n}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}t\right)\right]_0^1 - \left[\frac{2}{\pi n}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}t\right)\right]_1^2\right) \\ &= \frac{2}{4}\frac{2}{\pi n}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}2\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) \\ &= \frac{2}{\pi n}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \dfrac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt \\ &= \frac{2}{4}\left(\int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}t\right)dt + \int_1^2 (-1)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}t\right)dt\right) \\ &= \frac{2}{4}\left(\left[-\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}t\right)\right]_0^1 + \left[\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}t\right)\right]_1^2\right) \\ &= \frac{2}{4}\frac{2}{\pi n}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{2}2\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\pi n}\left(1 - 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + (-1)^n\right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{2-2(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi n}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \end{aligned}$$

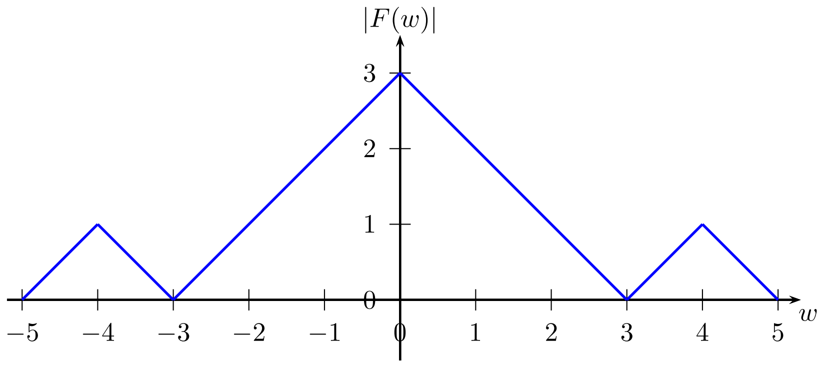
Escrevemos na tabela os primeiros coeficientes:

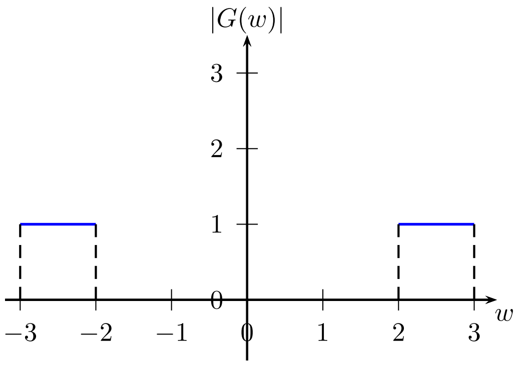
n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$-\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$	0	$-\frac{2}{7\pi}$
b_n	/	0	$\frac{2}{\pi}$	0	0	0	$\frac{2}{3\pi}$	

Portanto,

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t) - \frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{2}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right) + \frac{2}{3\pi}\operatorname{sen}(3\pi t) - \frac{2}{7\pi}\cos\left(\frac{7\pi}{2}t\right)$$

• **Questão 3** (2.5 pontos) Seja $f(t)$ e $g(t)$ duas funções com transformadas de Fourier $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ e $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ cujos diagramas de espectro de magnitudes são dados nos gráficos abaixo.

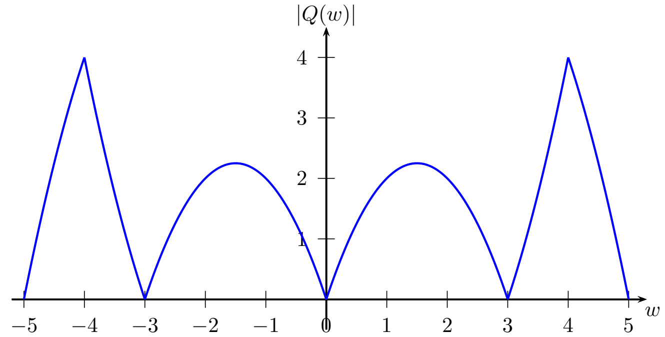


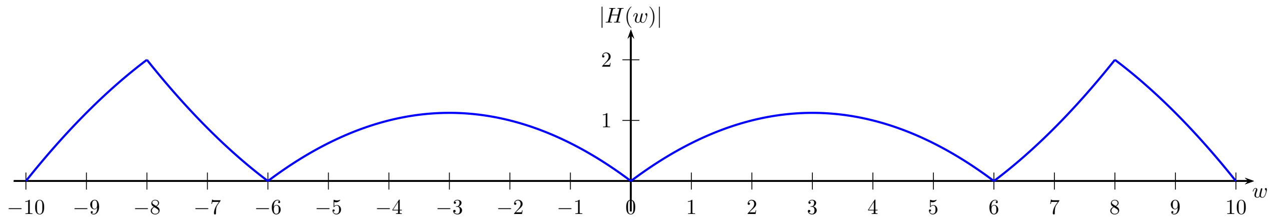


a) (1.0 ponto) Trace o diagrama de espectro de magnitudes da transformada de Fourier de $h(t) = f'(2t)$).

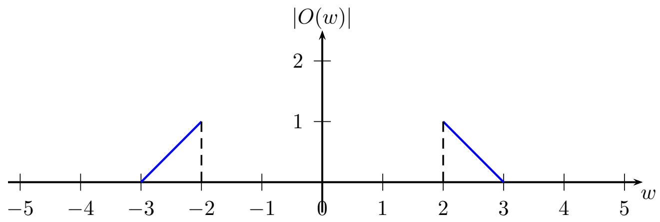
b) (1.5 ponto) Trace o diagrama de espectro de magnitudes da transformada de Fourier de $p(t) = 4(f * g)(t)\cos(2t)\cos(5t)$.

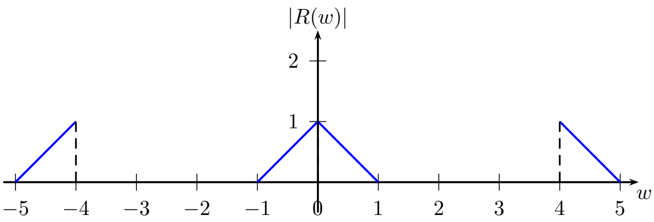
Solução a) Definimos $q(t) = f'(t)$ e temos $Q(w) = \mathcal{F}\{q(t)\} = iwF(w)$. Logo, $|Q(w)| = |w||F(w)|$. Como $h(t) = q(2t)$, temos $|H(w)| = \frac{1}{2}\left|Q\left(\frac{w}{2}\right)\right|$. Os gráficos de $|Q(w)|$ e $|H(w)|$ estão dados abaixo.

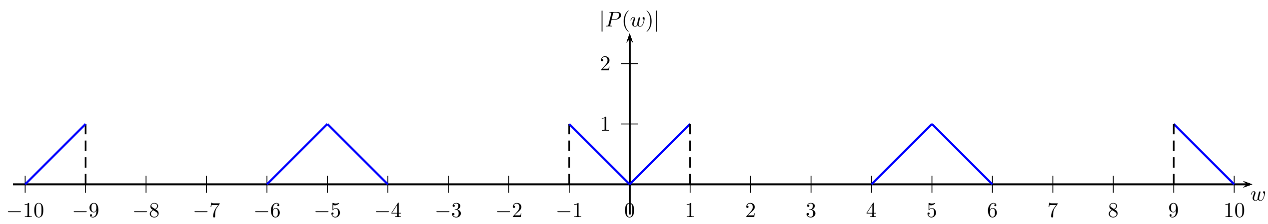




Solução b) Definimos $o(t) = (f * g)(t)$ e temos $O(w) = \mathcal{F}\{o(t)\} = F(w)G(w)$. Logo, $|O(w)| = |F(w)||G(w)|$. Também, definimos $r(t) = 2o(t)\cos(2t)$ e temos $|R(w)| = |O(w+2)| + |O(w-2)|$. Finalmente, temos $p(t) = 2r(t)\cos(5t)$ e $|P(w)| = |R(w+5)| + |R(w-5)|$. Os gráficos de $|O(w)|$, $|R(w)|$ e $|P(w)|$ estão dados abaixo.







• **Questão 4** (2.5 pontos) Considere a função
$$F(w) = \frac{\text{sen}(w)}{w}.$$

a) (1.5 ponto) Calcule a transformada inversa $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)\}$.

b) (1.0 ponto) Calcule as transformadas de Fourier das funções $g(t) = f(t)e^{2t}$, $h(t) = f(t-5)$ e $p(t) = f(2t)$.

Solução: a)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(w)}{w}e^{iwt}dw \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\text{sen}(w)\cos(wt)}{w}dw. \end{aligned}$$

Para $t > 0$, usamos a propriedade 5 para obter

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi}\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 \le t < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & t = 1, \\ 0, & t > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{4}, & t = 1, \\ 0, & t > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Para $t < 0$, temos

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\text{sen}(w)\cos(w(-t))}{w}dw,$$

onde usamos o fato que $\cos(wt)$ é par. Assim, como $-t > 0$, usamos novamente a propriedade 5 para obter

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi}\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 \le -t < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & -t = 1, \\ 0, & -t > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \ge t > -1 \\ \frac{1}{4}, & t = -1, \\ 0, & t < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Em qualquer caso, temos:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |t| < 1 \\ \frac{1}{4}, & t = -1 \text{ ou } t = 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Solução: b) Usandos as Propriedades 3, 4 e 11, temos:

$$G(w) = F(w+2i) = \frac{\text{sen}(w+2i)}{w+2i}$$

$$H(w) = e^{-5iw}F(w) = \frac{e^{-5iw}\,\text{sen}(w)}{w}$$

$$P(w) = \frac{1}{2}F\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{w}{2}\right)}{w}$$