**UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA**
**Departamento de Matemática Pura e Aplicada**
**MAT01168 - P3Y2S**
**Prova da área IIB**

| 1 - 4 | 5 | 6 | Total |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Nome:** Gabarito **Cartão:** ________________

**Questão 1.** Considere $f(t) = -2\cos^2(t) + \text{sen}(2t) + \text{sen}(4t)$ e sua expansão em Série de Fourier (forma exponencial) $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}$ em que $w_1$ é a frequência fundamental, $i^2 = -1$, é correto:

Frequência fundamental

( ) $w_1 = 1/2$

( ) $w_1 = 1$

(X) $w_1 = 2$

( ) $w_1 = 3$

( ) $w_1 = 4$

( ) nenhuma das anteriores está correta

Módulo de $C_2$

( ) $|C_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(X) $|C_2| = 1/2$

( ) $|C_2| = 1$

( ) $|C_2| = \sqrt{2}$

( ) $|C_2| = 2$

( ) nenhuma das anteriores está correta

Fase (argumento) de $C_2$

( ) $\phi_2 = 3\pi/4$

( ) $\phi_2 = \pi/2$

( ) $\phi_2 = \pi/4$

( ) $\phi_2 = -3\pi/4$

(X) $\phi_2 = -\pi/2$

( ) nenhuma das anteriores está correta

Potência média $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$

( ) $\bar{P}_f = 1$

( ) $\bar{P}_f = 1/2$

( ) $\bar{P}_f = 3/2$

(X) $\bar{P}_f = 5/2$

( ) $\bar{P}_f = 2$

( ) nenhuma das anteriores está correta

**Solução:**

$$f = -2\frac{1+\cos(2t)}{2} + \text{sen}(2t) + \text{sen}(4t) = -1 - \cos(2t) + \text{sen}(2t) + \text{sen}(4t) = -1 - \frac{e^{-2it}+e^{2it}}{2} + \frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i} + \frac{e^{4it}-e^{-4it}}{2i} =$$
$$-\frac{1}{2i}e^{-4it} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2i}\right)e^{-2it} - 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}\right)e^{2it} + \frac{1}{2i}e^{4it} = \frac{i}{2}e^{-4it} + \frac{i-1}{2}e^{-2it} - 1 - \frac{1+i}{2}e^{2it} - \frac{i}{2}e^{4it}$$

e portanto $w_1 = 2$. Por outro lado, $C_2 = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$, segue $|C_2| = \frac{1}{2}$ e $\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$.

Por outro lado (Parseval), $\bar{P}_f = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |C_n|^2 = |C_{-2}|^2 + |C_{-1}|^2 + |C_0|^2 + |C_1|^2 + |C_2|^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + 1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$

---

**Questão 2.** Considere $f(t) = te^{-|t|}$ , $g(t) = f(t) + f(-t)$, $h(t) = f(t) - f(-t)$, $i = \sqrt{-1}$

(A) Sobre a transformada de Fourier $G(w)$ de $g(t)$, é correto:

( ) $G(w) = -2i\int_0^\infty te^{-t}\,\text{sen}(wt)dt$

( ) $G(w) = \int_0^\infty te^{-t}(\cos(wt) - i\,\text{sen}(wt))dt$

( ) $G(w) = 2\int_0^\infty te^{-t}\cos(wt)dt$

( ) $G(w) = \int_0^\infty te^{-t}\cos(wt)dt$

(X) $G(w) = 0$

( ) nenhuma das alternativas anteriores

(B) Sobre a transformada de Fourier $H(w)$ de $h(t)$, é correto:

( ) $H(w) = -2i\int_0^\infty te^{-t}\,\text{sen}(wt)dt$

( ) $H(w) = \int_0^\infty te^{-t}(\cos(wt) - i\,\text{sen}(wt))dt$

( ) $H(w) = 2\int_0^\infty te^{-t}\cos(wt)dt$

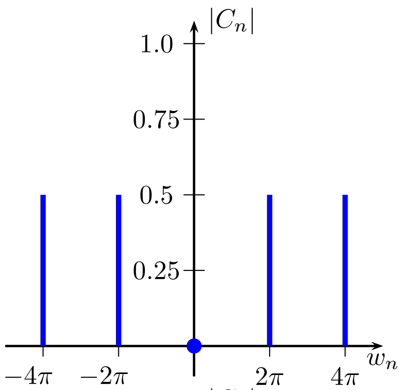
( ) $H(w) = \int_0^\infty te^{-t}\cos(wt)dt$

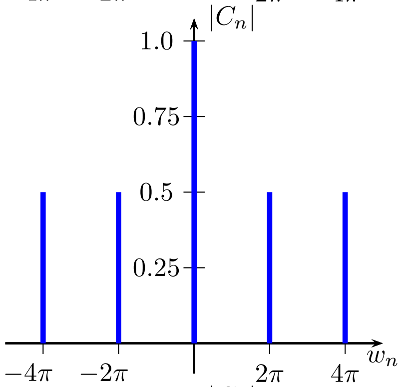
( ) $H(w) = 0$

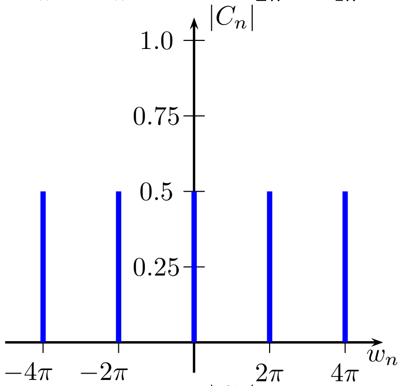
(X) nenhuma das alternativas anteriores

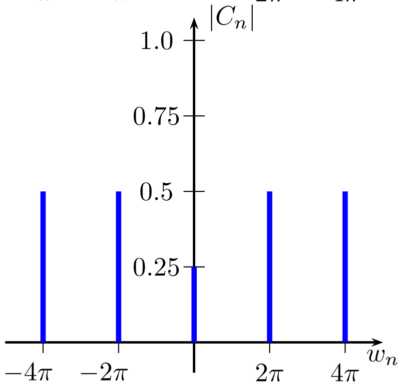
**Solução:** (A) $g(t) = te^{-|t|} + (-t)e^{-|-t|} = 0$ portanto sua transformada é a função nula.
(B) $h(t) = te^{-|t|} - (-t)e^{-|-t|} = 2te^{-|t|}$, que é uma função ímpar. Portanto
$H(w) = -2i\int_0^\infty 2te^{-t}\,\text{sen}(wt)dt$

**Questão 3.** Considere a função $f(t) = \cos(4\pi t) + 2\,\mathrm{sen}^2(\pi t)$. Sobre o diagrama de espectro de módulo (primeira coluna) e diagrama de espectro de fase, estão corretos:

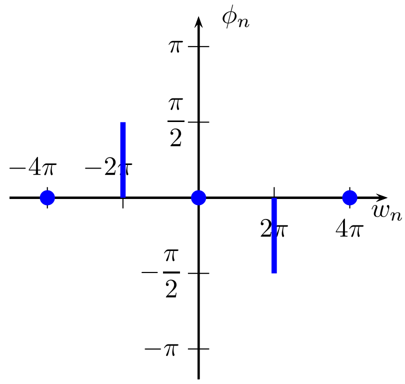
( )


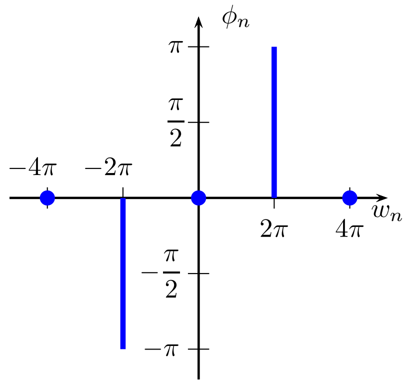

(X)


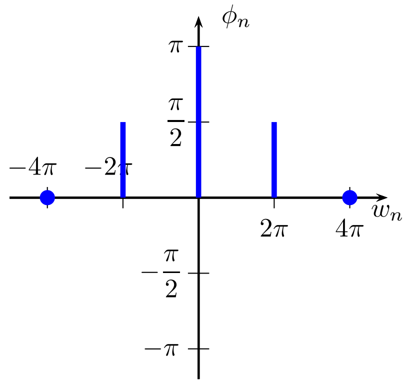

( )


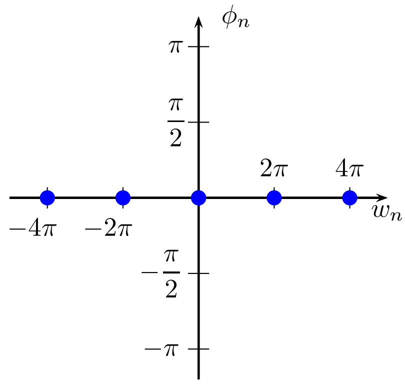

( )



( ) nenhuma das alternativas anteriores

( )



(X)



( )



( )



( ) nenhuma das alternativas anteriores

**Solução:** aplicando identidade trigonométrica obtemos $f(t) = \cos(4\pi t) + 1 - \cos(2\pi t)$ e portanto

$$f(t) = \frac{e^{4\pi it} + e^{-4\pi it}}{2} + 1 - \frac{e^{2\pi it} + e^{-2\pi it}}{2} = \frac{1}{2}e^{-4\pi it} - \frac{1}{2}e^{-2\pi it} + 1 - \frac{1}{2}e^{2\pi it} + \frac{1}{2}e^{4\pi it}$$

Assim $|C_0| = 1$, $|C_{-2}| = |C_{-1}| = |C_1| = |C_2| = \dfrac{1}{2}$ com ângulos $\phi_2 = \phi_0 = \phi_2 = 0$ e $\phi_{-1} = \phi_1 = \pm\pi$.

---

**Questão 4.** Sendo $u = u(x,t)$, considere o problema $\begin{cases} u_t(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = \delta(x-2) \end{cases}$

(A) apresente o problema de valor inicial que sua transformada de Fourier $U(\cdot,t)$ deve satisfazer, e então obtenha expressão analítica para $U(\cdot,t)$

(B) obtenha $u(x,t)$ como transformada inversa da expressão do ítem anterior.

**Solução:** (A)

$U_t = 4(ik)^2 U = -4k^2 U$ implica $U(k,t) = U(k,0)e^{-4k^2 t}$

$U(k,0) = \mathcal{F}\{\delta(x-2)\} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-2)e^{-ikx}dx = e^{-2ik}$ pela propriedade da amostragem

então $U(k,t) = e^{-2ik}e^{-4k^2 t}$ e poderemos aplicar a prop da translação.

(B) transformada inversa de uma função par:

$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-4k^2 t}\right\} = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-4tk^2}\cos(kx)dk \overset{a=2\sqrt{t}}{=} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4(4t)}} = \dfrac{1}{4\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{16t}}$

(ítem 8 da tab). Aplicando a prop da translação com $a = 2$, segue:

$u(x,t) = \dfrac{1}{4\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-2)^2}{16t}}$

---

**Questão 5.** Sendo $u = u(x,t)$, considere o problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -u, \text{ para todos } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**(A).** Obtenha a transformada de Fourier $F(\cdot)$ de $f(x) = 3\delta(x-2), x \in \mathbb{R}$, onde $\delta(\cdot)$ é a Delta de Dirac.

**(B).** Obtenha a transformada de Fourier $G(\cdot)$ de $g(x) = e^{-\frac{x^2}{4t}}, x \in \mathbb{R}$, onde $t$ é um parâmetro positivo, indicando as propriedades da tabela de transformadas de Fourier que foram usadas.

**(C).** Sendo $f(x)$ como definida em (A), e $U(k,t)$ a transformada de Fourier, na variável $x$, de $u(x,t)$, obtenha e resolva uma equação diferencial ordinária que $U(k,t)$ satisfaz. Obtenha a solução $u(x,t)$ pela respectiva transformação inversa.

**Solução:**

(A) $\mathcal{F}(f(x)) = \displaystyle\int_0^{\infty} 3\delta(x-2)e^{-ikx}dx = 3e^{-2ik}$ (prop da amostragem)

(B) $f$ é par e ainda, pelo ítem 8 da tabela de integrais ::

$\mathcal{F}(e^{-a^2x^2}) = 2\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\cos(kx)dx = 2\dfrac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{x^2}{4a^2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$

Para $a = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ temos $a^2 = \dfrac{1}{4t}$ e assim $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \sqrt{\pi}(2)\sqrt{t}e^{-tk^2} = 2\sqrt{\pi t}e^{-tk^2}$

(C) $\begin{cases} U_t = (ik)^2 U - U = -(1+k^2)U \\ U(k,0) = \mathcal{F}(f(x)) = 3e^{-ik} \end{cases} \Rightarrow U(k,t) = U(k,0)e^{-(1+k^2)t} = 3e^{-ik}e^{-t}e^{-k^2 t}$

$$u(x,t) = 3e^{-t}\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2ik}e^{-k^2 t}\right) = 3e^{-t}\frac{e^{-\frac{(x-2)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} = \frac{3e^{-t}e^{-\frac{(x-2)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}$$

$\square$