

1 - 3	4	5	Total

Alt. correta marcada com (X); meio-acerto marcado com (-), quando aplicável.

Questão 1. A decomposição em série de Fourier de uma função $f(t)$ resulta

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos(\pi t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\pi t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\pi t) + \frac{1}{7^2} \cos(7\pi t) + \frac{1}{9^2} \cos(9\pi t) + \dots \right), t \in \mathbb{R}$$

(A) Sobre período fundamental T :

(X) $T = 2$

() $T = 1$

() $T = \pi$

() $T = 2\pi$

() $T = \frac{1}{2}$

() $T = \frac{2}{\pi}$

() nenhuma das alternativas anteriores

(B) O equacionamento de $f' \left(\frac{1}{2} \right) = 1$ implica:

(-) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi}{4}$

(X) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi}{4}$

() $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{4}$

() $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{4}$

() $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots = \frac{\pi^2}{4}$ () N.D.A.

Solução: frequência angular fundamental é $w = \pi$, então $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{4}{\pi^2} \left((-\pi) \sin(\pi t) - \frac{3\pi}{3^2} \sin(3\pi t) - \frac{5\pi}{5^2} \sin(5\pi t) - \frac{7\pi}{7^2} \sin(7\pi t) - \frac{9\pi}{9^2} \sin(9\pi t) + \dots \right), t \in \mathbb{R} \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t) + \frac{1}{7} \sin(7\pi t) + \frac{1}{9} \sin(9\pi t) + \dots \right), t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e uma vez que $\sin(k\frac{\pi}{2})$ para $k = 1, 3, 5, \dots$ alterna entre 1 e -1, temos

$$\begin{aligned} f' \left(\frac{1}{2} \right) &= \frac{4}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \frac{1}{7} \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \frac{1}{9} \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) + \dots \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \right) = 1 \end{aligned}$$

(C) Obtenha uma expressão para $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$ aplicando o Teorema de Parseval

Solução: substituindo para a forma exponencial, onde $i^2 = -1$, $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{e^{-\pi it} + e^{\pi it}}{2} + \frac{1}{3^2} \frac{e^{-3\pi it} + e^{3\pi it}}{2} + \frac{1}{5^2} \frac{e^{-5\pi it} + e^{5\pi it}}{2} + \frac{1}{7^2} \frac{e^{-7\pi it} + e^{7\pi it}}{2} + \frac{1}{9^2} \frac{e^{-9\pi it} + e^{9\pi it}}{2} + \dots \right)$$

implica, pelo Teorema de Parseval (P13),

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \\ \frac{1}{4} + \frac{16}{\pi^4} \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{5^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{7^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{9^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \dots \right) &= \\ \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^4} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \dots \right) & \end{aligned}$$

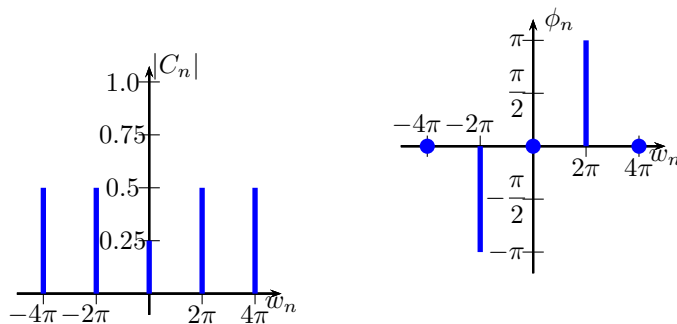
□

$$\text{Via analítica: } C_0 = \frac{1}{2}, \begin{cases} a_{2n-1} = -\frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2n-1)^2}, & b_{2n-1} = 0 \\ a_{2n} = 0, & b_{2n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{2n-1} = \frac{a_{2n-1} - ib_{2n-1}}{2} = -\frac{2}{\pi^2} \frac{1}{(2n-1)^2} \\ C_{2n} = \frac{a_{2n} - ib_{2n}}{2} = 0 \end{cases}$$

Por outro lado, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = |C_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2$ e assim

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^4} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

Questão 2. Sobre a função $f(t)$ que possui diagramas de espectro de módulo (esq) e diagrama de espectro de fase (dir) representados abaixo, está correto:



(A) sobre a frequência angular fundamental:

- 1 2π
 2 4π
 π nenhuma das anteriores

(B) sobre $\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$:

- 0
 1
 2
 2π
 π
 nenhuma das anteriores

(C) sobre $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$:

- $9/4$
 1
 2
 $17/16$
 $3/4$
 nenhuma das anteriores

Solução: Pelos gráficos, frequência angular fundamental é $w = 2\pi$, e

C_{-2}	$(0.5)e^{0i} = 1/2$
C_{-1}	$(0.5)e^{-\pi i} = -1/2$
C_0	$(0.25)e^{0i} = 1/4$
C_1	$(0.5)e^{\pi i} = -1/2$
C_2	$(0.5)e^{0i} = 1/2$

e demais C_n são nulos, portanto

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = C_0 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{16}$$

(D) Obtenha $f(t)$ na sua forma trigonométrica.

Solução usando os coeficientes C_n encontrados acima

$$f = \frac{1}{2}e^{-4\pi it} - \frac{1}{2}e^{-2\pi it} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{2\pi it} + \frac{1}{2}e^{4\pi it} = \frac{1}{2}(e^{-4\pi it} + e^{4\pi it}) - \frac{1}{2}(e^{-2\pi it} + e^{2\pi it}) + \frac{1}{4} = \cos(4\pi t) - \cos(2\pi t) + \frac{1}{4}$$

Questão 3. Considere $f(x) = xe^{-|x|}$, $g(x) = f(x) + f(-x)$, $h(x) = f(x) - f(-x)$, $i = \sqrt{-1}$

e também o problema $\begin{cases} u_t + 2u_x = -u & , x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$

(A) Sobre a transformada $G = \mathcal{F}\{g\}$ é correto:

- $G(k) = -2i \int_0^{\infty} xe^{-x} \sin(kx) dx$
 $G(k) = 2 \int_0^{\infty} xe^{-x} \cos(kx) dx$
 $G(k) = \int_0^{\infty} xe^{-x} (\cos(kx) - i \sin(kx)) dx$
 $G(k) = 4 \int_0^{\infty} xe^{-x} \cos(kx) dx$
 $G(k) = \int_0^{\infty} xe^{-x} \cos(kx) dx$
 nenhuma das alternativas anteriores

(B) Sobre a transformada $H = \mathcal{F}\{h\}$, é correto:

- $H(k) = -2i \int_0^{\infty} xe^{-x} \sin(kx) dx$
 $H(k) = 2 \int_0^{\infty} xe^{-x} \cos(kx) dx$
 $H(k) = -4i \int_0^{\infty} xe^{-x} \sin(kx) dx$
 $H(k) = \int_0^{\infty} xe^{-x} (\cos(kx) - i \sin(kx)) dx$
 $H(k) = \int_0^{\infty} xe^{-x} \cos(kx) dx$
 nenhuma das alternativas anteriores

(C) Obtenha a transformada de Fourier de $f(x)$

(D) Sendo $U(k, t)$ a transformada de Fourier de $u(x, t)$, obtenha e resolva o problema de valor inicial a ser satisfeito por U .

(E) Obtenha $u(x, t)$ através de transformada inversa.

Solução: $f(x)$ é ímpar, $g = 0$ e $h = 2f$ portanto tb é ímpar

(C) empregando T.9 com $a = 1$, $m = k$, $i^2 = -1$,

$$F(k) = -2i \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx = -2i \int_0^{\infty} x e^{-x} \operatorname{sen}(kx) dx = -2i \frac{2(1)k}{(1+k^2)^2} = -\frac{4ik}{(1+k^2)^2}$$

(D) Seja $U(k, t)$ transformada de $u(x, t)$

$$\begin{aligned} U_t + 2ikU &= -U \Rightarrow U_t = -(2ik + 1)U \\ U(k, 0) &= \mathcal{F}(u(x, 0)) = F(k) \end{aligned}$$

portanto U satisfaz ao PVI $\begin{cases} U_t = -(2ik + 1)U \\ U(k, 0) = F(k) \end{cases}$ cuja solução é $U(k, t) = U(k, 0)e^{-(2ik+1)t} = F(k)e^{-(2ik+1)t}$.

(E) Aplicando a transformada inversa, e a propriedade P.4 com $a = 2t$

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(F(k)e^{-t}e^{-2ikt}) = e^{-t}\mathcal{F}^{-1}(F(k)e^{-2ikt}) = e^{-t}f(x - 2t) = e^{-t}(x - 2t)e^{-|x-2t|}$$

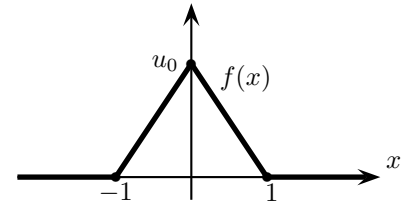
Questão 4. Considere f como na fig abaixo, $i = \sqrt{-1}$, $u_0 > 0$ e também o problema $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & , x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & , x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0 & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$

(A) Sobre a transformada de Fourier $F(k)$ de $f(x)$, é correto:

() $F(k) = -2iu_0 \frac{\operatorname{sen}(k)}{k^2}$ () $F(k) = -2u_0 \frac{1 - \cos(k)}{k}$

(-) $F(k) = -2u_0 \frac{1 - \cos(k)}{k^2}$ () $F(k) = 2iu_0 \frac{1 - \cos(k)}{k^2}$

() $F(k) = 2u_0 \frac{\operatorname{sen}(k)}{k}$ (X) nenhuma das alternativas anteriores



Solução: $f' = \begin{cases} u_0 & , -1 \leq x \leq 0 \\ -u_0 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$ que é uma função ímpar, então

$$\mathcal{F}(f') = -2i \int_0^{\infty} f'(x) \operatorname{sen}(kx) dx = -2i \int_0^1 (-u_0) \operatorname{sen}(kx) dx = 2iu_0 \left[\frac{-\cos(kx)}{k} \right]_0^1 = \frac{2iu_0(1 - \cos(k))}{k}$$

portanto $\mathcal{F}(f) = \frac{\mathcal{F}(f')}{ik} = 2u_0 \frac{1 - \cos(k)}{k^2}$

(B) Sendo $U(k, t)$ a transformada de Fourier de $u(x, t)$, obtenha e resolva o problema de valor inicial a ser satisfeito por U .

(C) Obtenha expressão para $u(x, t)$ através de transformada inversa.

Solução: sendo $U(k, t) = \mathcal{F}_x(u(x, t))$,

$$\begin{cases} U_{tt} - 4(ik)^2 U = 0 \\ U(k, 0) = \mathcal{F}_x(f(x)) = F(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{tt} = -4k^2 U \\ U(k, 0) = \mathcal{F}_x(f(x)) = F(k) \end{cases}$$

então a solução geral da EDO é $U(k, t) = A(k) \cos(2kt) + B(k) \operatorname{sen}(2kt)$, mas

$$\begin{aligned} U(k, 0) = F(k) &\Rightarrow A(k) = F(k) \text{ ao passo que} \\ U_t(k, 0) = 0 &\Rightarrow B(k) = 0 \end{aligned}$$

então $U(k, t) = F(k) \cos(2kt)$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(F(k) \cos(2kt)) &= \mathcal{F}^{-1}\left(F(k) \frac{e^{2ikt} + e^{-2ikt}}{2}\right) = \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}(F(k)e^{2ikt}) + \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}(F(k)e^{-2ikt}) = \\ &= \frac{1}{2} f(x + 2t) + \frac{1}{2} f(x - 2t) \end{aligned}$$

□