

1	2	3	4	Total

Nome: _____ Cartão: _____

- Regras Gerais:
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
 - Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
 - Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

- Regras para as questões abertas:
- Seja sucinto, completo e claro.
 - Justifique todo procedimento usado.
 - Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
 - Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw \mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2 \mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) ^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n ^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt,$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$ onde $C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw, \text{ para } f(t) \text{ real,}$ onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw,$ onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt$

Integrais definidas

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{- m a} \quad (a > 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-ma}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2} e^{ma}, & m < 0 \end{cases}$
5. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \\ 0, & n > m \end{cases} \quad (m > 0, n > 0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
9. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{(a^2 + (m - n)^2)(a^2 + (m + n)^2)} \quad (a > 0)$
11. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\sin(ma) + \cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2} dx = m \frac{\pi}{2}$	14. $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax) \sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \sin(nx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	18. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	22. $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin(mx) dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

Identidades Trigonômicas:

$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}$	$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$	$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}$
---	---	---

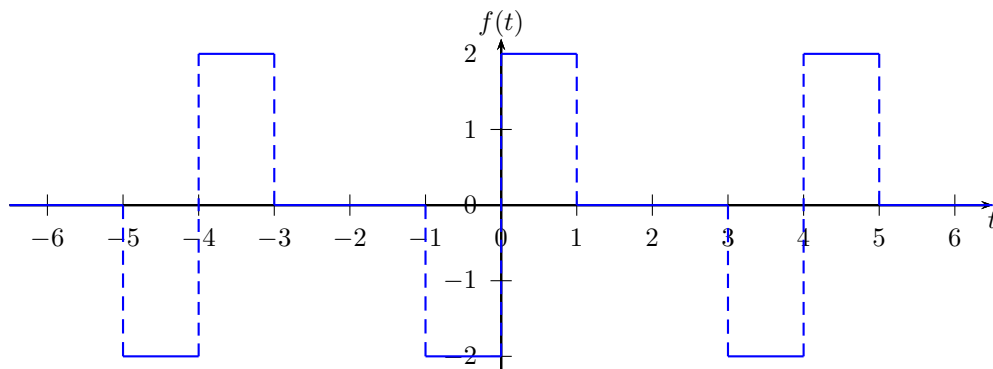
Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó #	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré #	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá #	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol #	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá #	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x^2 \cos(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \cos(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - 2) \sin(\lambda x)}{\lambda^3} + C$
$\int x^2 \sin(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \sin(\lambda x) + (2 - \lambda^2 x^2) \cos(\lambda x)}{\lambda^3} + C$

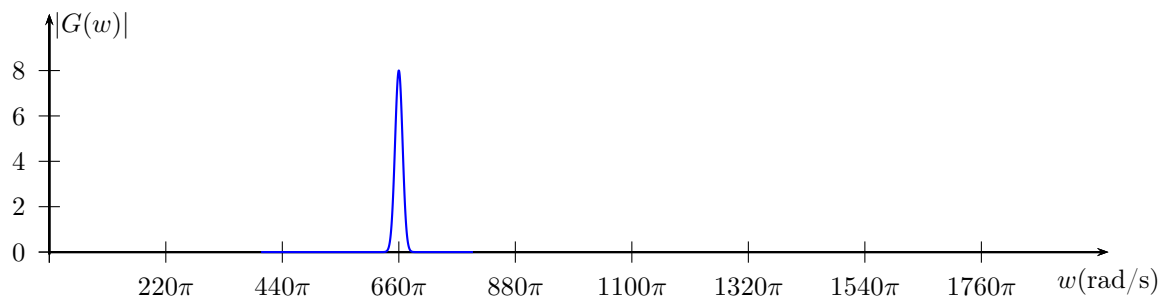
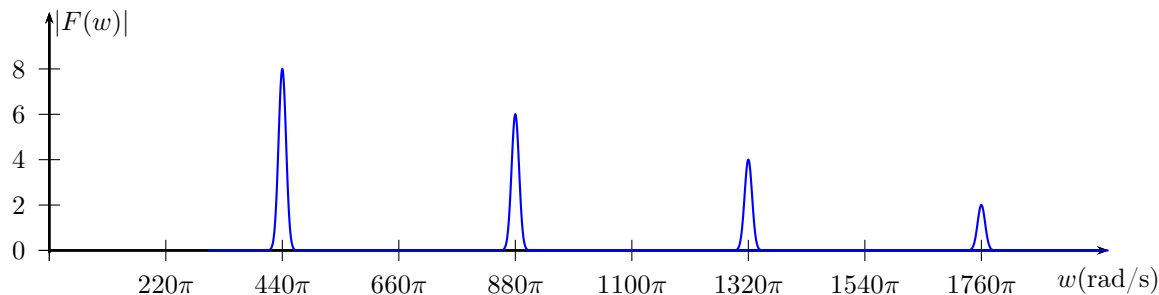
- **Questão 1** (2.0 pontos) Calcule a série de Fourier da função periódica dada pelo gráfico abaixo.



Solução: Observe que a função é ímpar. Isso significa que $a_0 = 0$ e $a_n = 0$, $n > 1$. Portanto, vamos calcular b_n . O período é $T = 4$ e a frequência angular fundamental é $w_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, isto é, $w_n = \frac{\pi n}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f(t) \operatorname{sen}(w_n t) dt \\
 &= \frac{4}{4} \int_0^2 f(t) \operatorname{sen}(w_n t) dt && \text{(pois } f(t) \text{ é ímpar e } f(t) \operatorname{sen}(w_n t) \text{ par)} \\
 &= \int_0^1 2 \operatorname{sen}(w_n t) dt && \text{(pois } f(t) = 2 \text{ para } t \in (0,1) \text{ e } f(t) = 0 \text{ para } t \in (1,2)) \\
 &= 2 \left[-\frac{\cos(w_n t)}{w_n} \right]_0^1 \\
 &= 2 \frac{1 - \cos(w_n)}{w_n} \\
 &= \frac{4}{\pi n} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right).
 \end{aligned}$$

• **Questão 2** (3.0 pontos) Considere as funções $f(t)$ e $g(t)$, representando ondas sonora produzidas por instrumentos musicais. Abaixo estão representados os diagramas de magnitudes das transformadas de Fourier $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ e $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$.

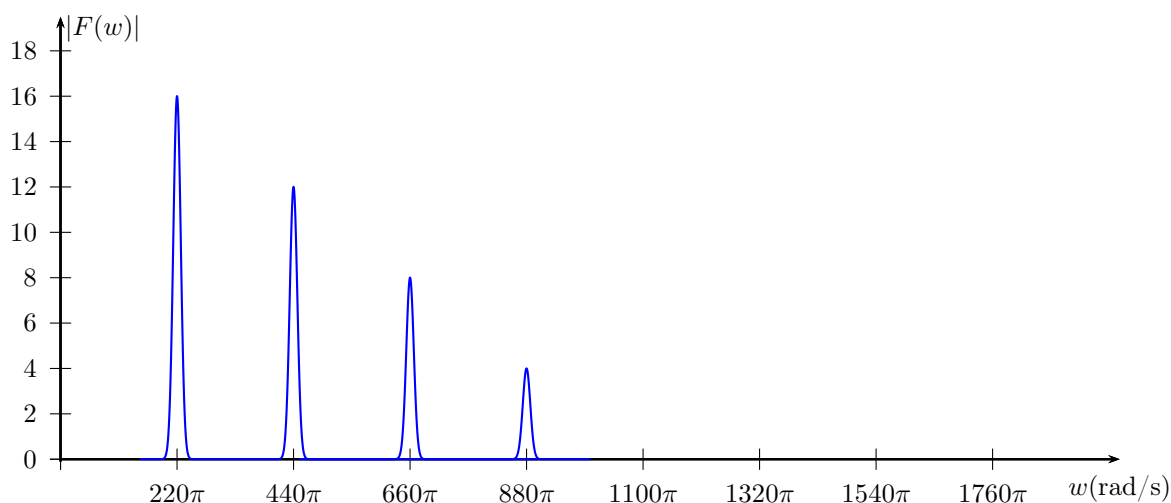


Faça o que se pede:

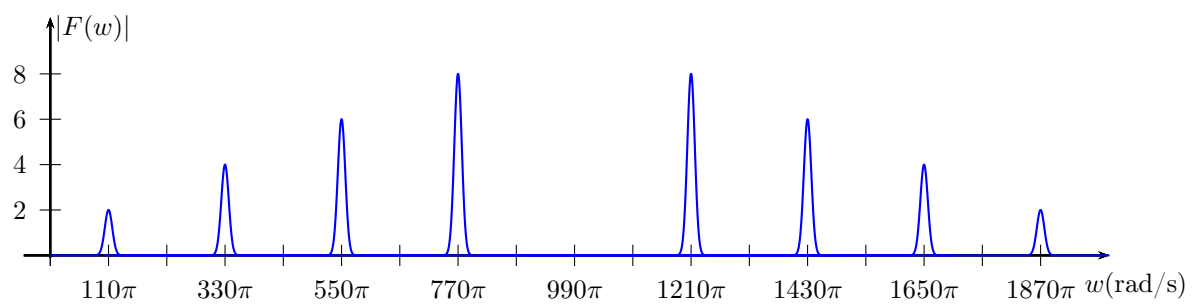
- (0.25 ponto) Qual é a nota musical representada pelo sinal $f(t)$?
- (0.25 ponto) Qual é a nota musical representada pelo sinal $g(t)$?
- (0.5 ponto) Qual é a nota musical representada pelo sinal $h(t) = f(t) + g(t)$?
- (1.0 ponto) Qual é a nota musical representada pelo sinal $p(t) = f(t/2)$? Esboce o diagrama de espectro de magnitudes de $P(w) = \mathcal{F}\{p(t)\}$.
- (1.0 ponto) Qual é a nota musical representada pelo sinal $q(t) = p(t) \cos(990\pi t)$. Esboce o diagrama de espectro de magnitudes de $Q(w) = \mathcal{F}\{q(t)\}$.

Solução:

- Lá na escala 3.
- Mi na escala 4.
- Lá na escala 2.
- Lá na escala 2. Usando a propriedade da mudança de escala, temos $|P(w)| = 2|F(2w)|$.



- Lá na escala 2. Usando a propriedade da mudança modulação, temos $|Q(w)| = \frac{|P(w - 990\pi)| + |P(w + 990\pi)|}{2}$. Observe que a igualdade é possível, pois não há sobreposição espectral.



- **Questão 3** (3.0 pontos) Considere a função

$$f(t) = 16 \cos^4(2t) + 8 \sin(4t)$$

e responda o que se pede.

- a) (1.0 ponto) Dada a série de Fourier trigonométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t),$$

preencha as tabelas abaixo com os coeficientes de Fourier a_n e b_n e com o período T e a frequência angular fundamental w_1 .

n	0	1	2	3
w_n				
a_n				
b_n				
T				
w_1				

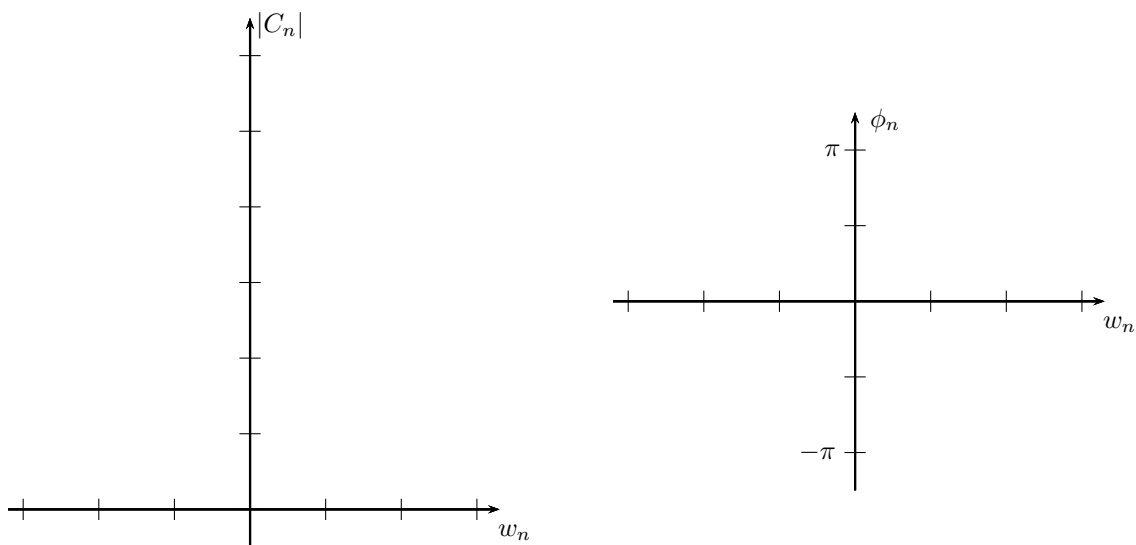
- b) (1.0 ponto) Dada a série de Fourier exponencial

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$$

preencha a tabela abaixo com os coeficientes de Fourier C_n , com o módulo $|C_n|$ e com a fase ϕ_n .

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
C_n							
$ C_n $							
ϕ_n							

- c) (1.0 ponto) Esboce os diagramas de espectro de magnitudes e fases nos espaços indicados abaixo. Complete as escalas em cada eixo do gráfico.



Solução:

- a) Primeiro, vamos expandir a função $16 \cos^4(2t)$ em termo de senos e cossenos:

$$\begin{aligned}
 16 \cos^4(2t) &= 16 \left(\frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} \right)^4 \\
 &= 16 \left(\frac{e^{8it} + 4e^{6it}e^{-2it} + 6e^{4it}e^{-4it} + 4e^{2it}e^{-6it} + e^{-8it}}{16} \right) \\
 &= 16 \left(\frac{e^{8it} + 4e^{4it} + 6 + 4e^{-4it} + e^{-8it}}{16} \right) \\
 &= 6 + 2 \left(\frac{e^{8it} + e^{-8it}}{2} \right) + 8 \left(\frac{e^{4it} + e^{-4it}}{2} \right) \\
 &= 6 + 2 \cos(8t) + 8 \cos(4t)
 \end{aligned}$$

Portanto,

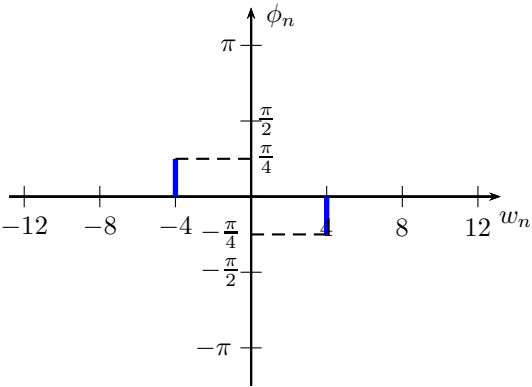
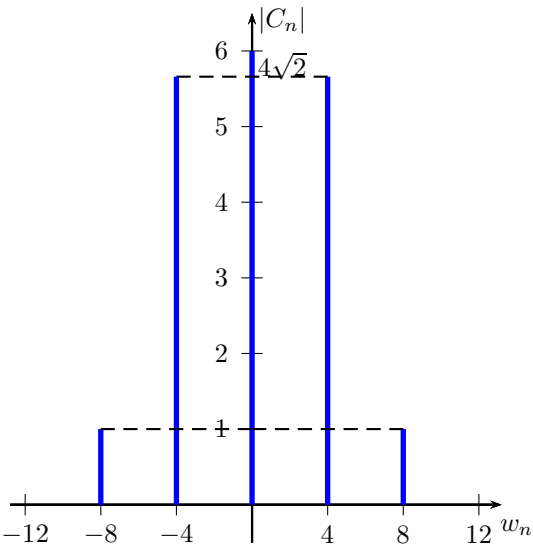
$$f(t) = 6 + 8 \cos(4t) + 8 \sin(4t) + 2 \cos(8t)$$

n	0	1	2	3
w_n	0	4	8	12
a_n	12	8	2	0
b_n	0	8	0	0

T	$\frac{\pi}{2}$
w_1	4

b) Usamos a expressão $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ para $n \geq 0$ e $C_{-n} = \overline{C_n}$.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
C_n	0	1	$4 + 4i$	6	$4 - 4i$	1	0
$ C_n $	0	1	$4\sqrt{2}$	6	$4\sqrt{2}$	1	0
ϕ_n	0	0	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{4}$	0	0



c)

- **Questão 4** (2.0 pontos) Resolva o seguinte problema de difusão de calor com velocidade:

$$\begin{aligned}u_t + 3u_x - u_{xx} &= 0 \\ u(x, 0) &= 10\delta(x).\end{aligned}$$

Solução: Usamos a notação $\mathcal{F}\{u(x, t)\} = U(k, t)$ e aplicamos a Transformada de Fourier para obter

$$\begin{aligned}U_t &= -3ikU - k^2U \\ U(k, 0) &= 10.\end{aligned}$$

A solução da equação acima é calculada por separação de variáveis:

$$U(k, t) = 10e^{-3ikt - k^2t} = 10e^{-3ikt}e^{-k^2t}.$$

Calculamos a transformada inversa da seguinte forma:

- i) Transformada inversa da função e^{-k^2t} :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{-k^2t}\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-k^2t} \cos(kx) dk = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\end{aligned}$$

- ii) Transformada inversa da função $10e^{-3ikt}e^{-k^2t}$ usando a propriedade do deslocamento:

$$u(x, t) = \mathcal{F}\{10e^{-3ikt}e^{-k^2t}\} = \frac{5}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-3t)^2}{4t}}$$