

1	2	3	4	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw \mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2 \mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) ^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n ^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt,$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$ onde $C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw, \text{ para } f(t) \text{ real,}$ onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw,$ onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt$

Integrais definidas

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{- m a} \quad (a > 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-ma}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2} e^{ma}, & m < 0 \end{cases}$
5. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \\ 0, & n > m \end{cases} \quad (m > 0, n > 0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
9. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{(a^2 + (m - n)^2)(a^2 + (m + n)^2)} \quad (a > 0)$
11. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\sin(ma) + \cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2} dx = m \frac{\pi}{2}$	14. $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax) \sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \sin(nx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	18. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	22. $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin(mx) dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

Identidades Trigonômétricas:

$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}$	$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$	$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}$
---	---	---

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó #	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré #	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá #	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol #	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá #	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x^2 \cos(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \cos(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - 2) \sin(\lambda x)}{\lambda^3} + C$
$\int x^2 \sin(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \sin(\lambda x) + (2 - \lambda^2 x^2) \cos(\lambda x)}{\lambda^3} + C$

- **Questão 1** (2.5 pontos) Considere a função

$$f(t) = t, \quad -\pi < t < \pi,$$

estendida periodicamente com período 2π , isto é, $f(t + 2\pi) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

- a) (1.5 ponto) Calcule a série de Fourier da função $f(t)$.
b) (0.5 ponto) Calcule a potência média da função $f(t)$ dada por

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt.$$

- c) (0.5 ponto) Use o teorema de Parseval para concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solução:

- a) Como f é uma função ímpar, $a_0 = 0$ e $a_n = 0$, $n \geq 1$. Dado que $T = 2\pi$, temos $w_n = n$ e os coeficientes são dados por

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \operatorname{sen}(nt) dt.$$

Como o integrando é par,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \operatorname{sen}(nt) dt.$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-\frac{t \cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n^2} [\operatorname{sen}(nt)]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi \cos(\pi n)}{n} \right) \\ &= -\frac{2(-1)^n}{n} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de f é

$$f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nt).$$

- b) A potência média é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

- c) Aplicamos o teorema de Parseval para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{a_n - ib_n}{2} \right|^2. \end{aligned}$$

Aqui, observamos que, se $n \neq 0$, então

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = -\frac{i(-1)^{n+1}}{n} = \frac{i(-1)^n}{n},$$

e $C_0 = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

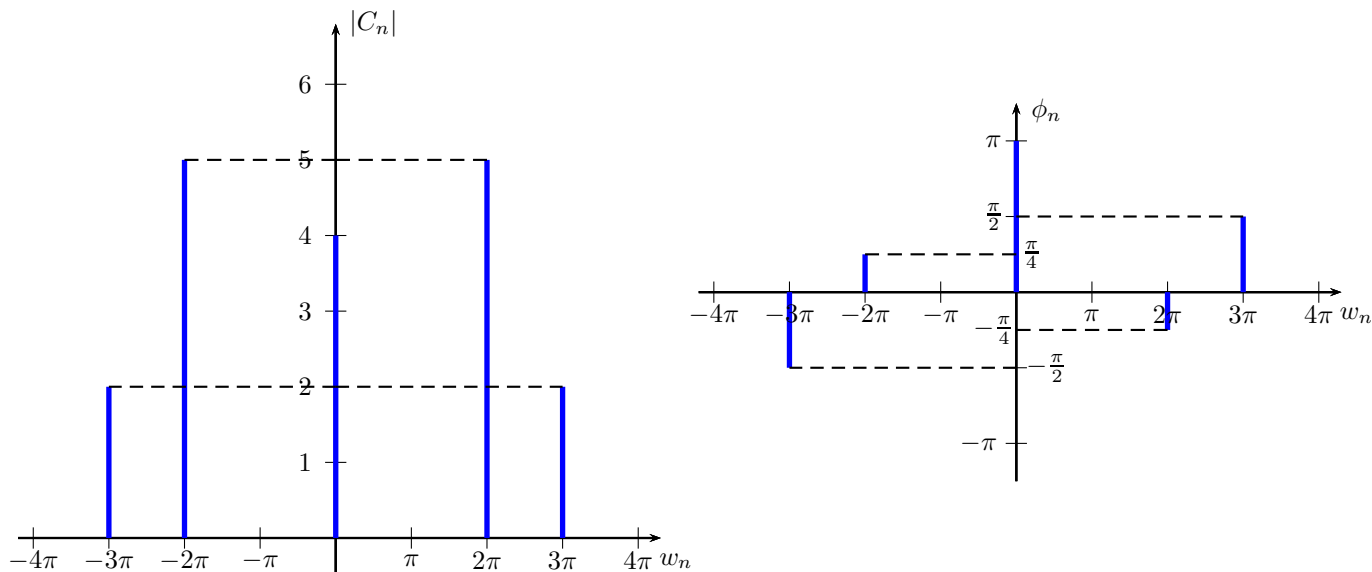
Usando o resultado do item b), temos:

$$\frac{\pi^2}{3} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- **Questão 2** (2.5 pontos) Considere a função T -periódica $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t}$ cujos diagramas de espectro são dados nos gráficos abaixo.



- a) (0.5 ponto) Calcule o período fundamental e a frequência angular fundamental da função $f(t)$
b) (2.0 ponto) Escreva a função $f(t)$ em termos de senos e cossenos.

Solução: a) A frequência angular fundamental é $w = \pi$, por que 2π e 3π são múltiplos de π , mas 3π não é múltiplo de 2π . Portanto, o período fundamental é $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

Solução: b) Os coeficientes dados nos gráficos são

n	0	1	2	3	4
$ C_n $	4	0	5	2	0
ϕ_n	π	0	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0
C_n	$4e^{i\pi} = -4$	0	$5e^{-i\pi/4} = 5 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 5i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}i}{2}$	$2e^{i\pi/2} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i$	0

onde $C_n = |C_n|e^{i\phi_n}$. Como $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, temos:

$$C_0 = \frac{a_0 - ib_0}{2} = -4 \Rightarrow a_0 = -8 \text{ e } b_0 = 0.$$

$$C_1 = \frac{a_1 - ib_1}{2} = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \text{ e } b_1 = 0.$$

$$C_2 = \frac{a_2 - ib_2}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}i}{2} \Rightarrow a_2 = 5\sqrt{2} \text{ e } b_2 = 5\sqrt{2}.$$

$$C_3 = \frac{a_3 - ib_3}{2} = 2i \Rightarrow a_3 = 0 \text{ e } b_3 = -4.$$

$$C_4 = \frac{a_4 - ib_4}{2} = 0 \Rightarrow a_4 = 0 \text{ e } b_4 = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_2 \cos(w_2 t) + b_2 \sin(w_2 t) + b_3 \sin(w_3 t) \\ &= -4 + 5\sqrt{2} \cos(2\pi t) + 5\sqrt{2} \sin(2\pi t) - 4 \sin(3\pi t). \end{aligned}$$

- **Questão 3** (2.5 pontos) Considere a função

$$F(w) = \begin{cases} 1, & 550\pi \leq |w| \leq 1100\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a função

$$g(t) = -2\cos(880\pi t) + 2\cos(1320\pi t).$$

Neste exercício, as frequências estão dadas em radianos por segundo. Responda os itens.

- a) (1.0 ponto) Calcule $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)\}$.
- b) (1.5 ponto) Marque em cada coluna quais são as notas $g(t)$, $g(2t)$, $f(t) * g(t)$, $f(t) * g(2t)$, $f(t) * g(t/2)$ e $f(t) * g(t/4)$.
- | | | |
|---------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| (0.2 ponto) $g(t)$ | (0.2 ponto) $g(2t)$ | (0.2 ponto) $(f(t) * g(t))$ |
| () Lá na escala 3 | () Lá na escala 3 | () Lá na escala 3 |
| () Lá na escala 4 | () Lá na escala 4 | () Lá na escala 4 |
| () Lá na escala 5 | () Lá na escala 5 | () Lá na escala 5 |
| () Mi na escala 4 | () Mi na escala 4 | () Mi na escala 4 |
| () Mi na escala 5 | () Mi na escala 5 | () Mi na escala 5 |
| () Sem som (Função nula) | () Sem som (Função nula) | () Sem som (Função nula) |

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| (0.3 ponto) $(f(t) * g(2t))$ | (0.3 ponto) $(f(t) * g(t/2))$ | (0.3 ponto) $(f(t) * g(t/4))$ |
| () Lá na escala 3 | () Lá na escala 3 | () Lá na escala 3 |
| () Lá na escala 4 | () Lá na escala 4 | () Lá na escala 4 |
| () Lá na escala 5 | () Lá na escala 5 | () Lá na escala 5 |
| () Mi na escala 4 | () Mi na escala 4 | () Mi na escala 4 |
| () Mi na escala 5 | () Mi na escala 5 | () Mi na escala 5 |
| () Sem som (Função nula) | () Sem som (Função nula) | () Sem som (Função nula) |

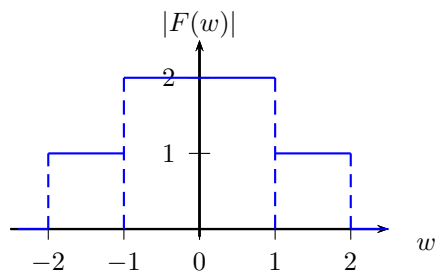
Solução:

a)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{itw} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) (\cos(wt) + i \sin(wt)) dw \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} F(w) \cos(wt) dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{550\pi}^{1100\pi} \cos(wt) dw \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(wt)}{t} \right]_{w=550\pi}^{1100\pi} \\ &= \frac{\sin(1100\pi t) - \sin(550\pi t)}{\pi t} \end{aligned}$$

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| (0.2 ponto) $g(t)$ | (0.2 ponto) $g(2t)$ | (0.2 ponto) $(f(t) * g(t))$ |
| (X) Lá na escala 3 | () Lá na escala 3 | () Lá na escala 3 |
| () Lá na escala 4 | (X) Lá na escala 4 | (X) Lá na escala 4 |
| b) () Lá na escala 5 | () Lá na escala 5 | () Lá na escala 5 |
| () Mi na escala 4 | () Mi na escala 4 | () Mi na escala 4 |
| () Mi na escala 5 | () Mi na escala 5 | () Mi na escala 5 |
| () Sem som (Função nula) | () Sem som (Função nula) | () Sem som (Função nula) |
- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| (0.3 ponto) $(f(t) * g(2t))$ | (0.3 ponto) $(f(t) * g(t/2))$ | (0.3 ponto) $(f(t/2) * g(t/4))$ |
| () Lá na escala 3 | () Lá na escala 3 | () Lá na escala 3 |
| () Lá na escala 4 | () Lá na escala 4 | () Lá na escala 4 |
| () Lá na escala 5 | () Lá na escala 5 | () Lá na escala 5 |
| () Mi na escala 4 | (X) Mi na escala 4 | () Mi na escala 4 |
| () Mi na escala 5 | () Mi na escala 5 | () Mi na escala 5 |
| (X) Sem som (Função nula) | () Sem som (Função nula) | (X) Sem som (Função nula) |

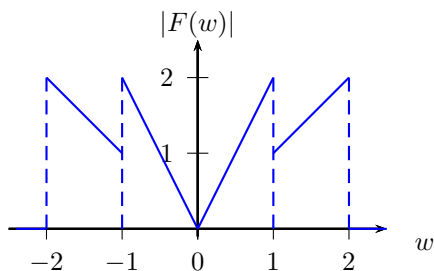
• **Questão 4** (2.5 pontos) Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções que possuem transformadas de Fourier e $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ e $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$. O gráfico abaixo apresenta o diagrama de espectro de magnitudes de $F(w)$.



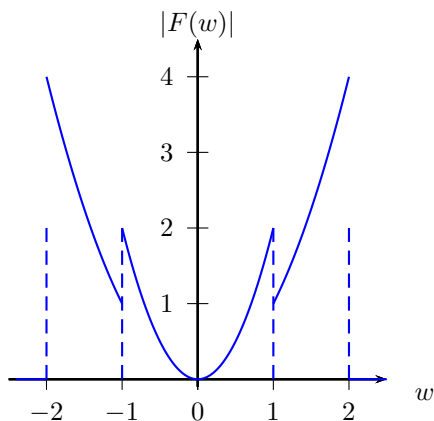
- a) (0.8 ponto) Esboce o diagrama de magnitudes de $g(t) = f'(t)$.
b) (0.8 ponto) Esboce o diagrama de magnitudes de $h(t) = f''(t)$.
c) (0.9 ponto) Esboce o diagrama de magnitudes de $p(t) = f''(t) \cos(2t)$.

Solução

- a) Como $G(w) = iwF(w)$, temos $|G(w)| = |w||F(w)|$.



- b) Temos $h(t) = g'(t)$ e $H(w) = iwG(w)$. Logo, $|H(w)| = |w||G(w)|$.



- c) Temos $p(t) = h(t) \cos(2t)$ e $P(w) = \frac{H(w+2) + H(w-2)}{2}$. Como não há sobreposição espectral, $|P(w)| = \frac{|H(w+2)| + |H(w-2)|}{2}$.

