Segunda avaliação - MAT01168 - MATEMÁTICA APLICADA II - Turma A

Nome: Cartão: Turma:

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente a sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas. Se precisar de folhas adicionais, solicite ao professor.
- É permitido o uso de calculadoras científicas sem recursos gráficos, de computação simbólica (ex. resolução de integrais) ou armazenamento de textos.

Formulário:

1. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
2. $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$
3. $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} a^{n-j} b^j$, $\binom{j}{k} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$

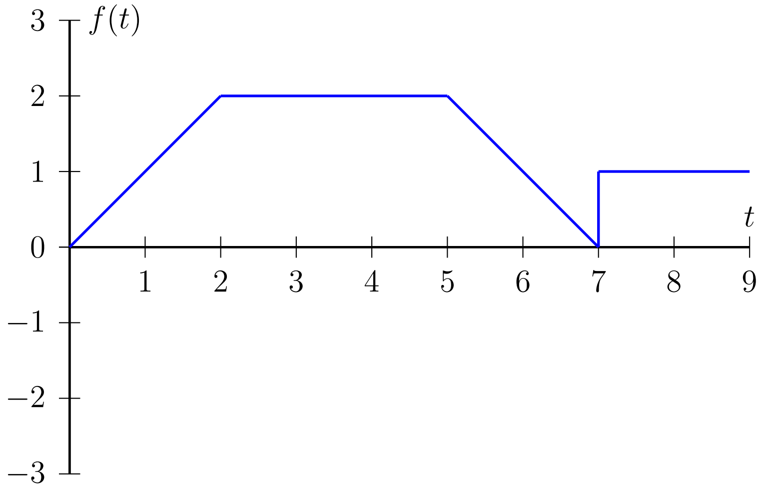
Questão 1(3.0) Considere a função $f(t)$ dada por

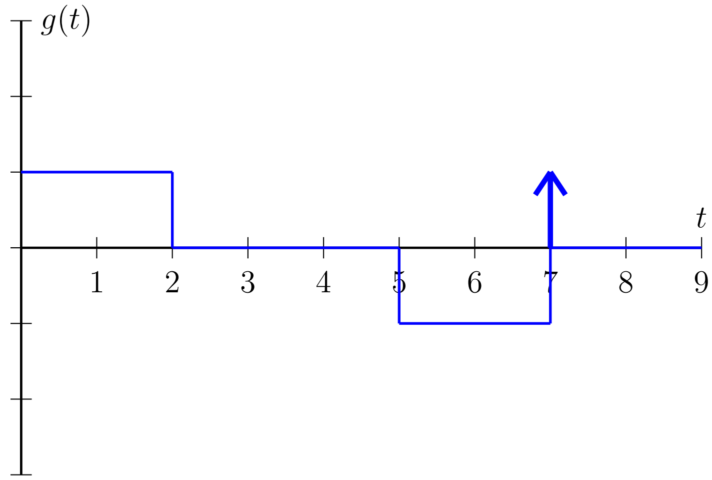
$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & 2 \leq t < 5 \\ 7 - t, & 5 \leq t < 7 \\ 1 & t \geq 7 \end{cases}$$

a) (1.5) Represente a função $f(t)$ em termos de funções de Heaviside. Calcule sua derivada $g(t) = f'(t)$. Esboce os gráficos de $f(t)$ e $g(t)$ indicando valores notáveis.

b) (1.5) Calcule as transformadas de Laplace $F(s)$ e $G(s)$.

Solução item a





$$\begin{aligned} f(t) &= u(t)t + (2-t)u(t-2) + (5-t)u(t-5) + (t-6)u(t-7) \\ g(t) &= f'(t) = u(t) - u(t-2) - u(t-5) + u(t-7) + \delta(t-7) \end{aligned}$$

Calculamos primeiramente a transformada de $g(t)$:

$$G(s) = \frac{1}{s}\left[1 - e^{-2s} - e^{-5s} + e^{-7s}\right] + e^{-7s}$$

E usamos a propriedade da derivada:

$$G(s) = sF(s) - f(0) = sF(s)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}\left[1 - e^{-2s} - e^{-5s} + e^{-7s}\right] + \frac{1}{s}e^{-7s}$$

Questão 2 (2.5) Dada a equação do oscilador harmônico simples:

$$-ky(t) - \beta y'(t) + f_{ext} = my''(t).$$

Calcule a resposta $y(t)$ deste oscilador sujeito a forças externas e condições iniciais. Considere $m = 1$, $k = 2$, $\beta = 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ e a força externa é dada por

$$f_{ext} = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ e^{-t}, & t > 2 \end{cases}$$

Usando a técnica da Transformada de Laplace, obtenha a solução $y(t)$.

Solução

Passo 1

Primeiro calculamos a transformada de Laplace do termo forçante:

$$\begin{aligned} f_{ext} &= e^{-t}u(t-2) = e^{-2}e^{-(t-2)}u(t-2) \\ F_{ext}(s) &= \mathcal{L}\left\{f_{ext}(t)\right\} = e^{-2}e^{-2s}\frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

Substituindo os valores na equação temos:

$$-2y(t) - 2y'(t) + f_{ext} = y''(t)$$

Definimos $Y(s) = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}$ e obtemos a seguinte equação subsidiária:

$$-2Y(s) - 2\left[sY(s) - y(0)\right] + e^{-2}e^{-2s}\frac{1}{s+1} = \left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right]$$

Passo 2

$$\left(s^2 + 2s + 2\right)Y(s) = e^{-2}e^{-2s}\frac{1}{s+2} \Longrightarrow Y(s) = \frac{e^{-2}e^{-2s}}{\left(s^2+2s+2\right)(s+1)}$$

Completando quadrados, temos:

$$Y(s) = \frac{e^{-2}e^{-2s}}{\left[(s+1)^2+1\right](s+1)}$$

Passo 3

Calculamos a transformada inversa $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}$.

$$Y(s) = e^{-2}e^{-2s}F(s+1)$$

onde $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)s}$. Por tab(19),

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = (1 - \cos t).$$

Aplicando a propriedade do deslocamento em s, temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s+1)\right\} = e^{-t}(1 - \cos t).$$

Aplicando a propriedade do deslocamento em t, temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}F(s+1)\right\} = e^{-(t-2)}[1 - \cos(t-2)]u(t-2).$$

Finalmente:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = e^{-t}[1 - \cos(t-2)]u(t-2).$$

Obs: Poderíamos igualmente ter expandido a função

$$\frac{1}{\left[(s+1)^2+1\right](s+1)}$$

em frações parciais e ter calculado a transforma inversa de cada termo.

Questão 3 (2.0) Use o método da Transformada de Laplace para encontrar a solução da seguinte equação diferencial:

$$ty'(t) = 5y(t).$$

sujeita à condição $y(1) = 1$.

Solução

Passo 1

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}\left[sY(s) - y(0)\right] &= 5Y(s) \\ -\left[sY'(s) + Y(s)\right] &= 5Y(s) \end{aligned}$$

Passo 2

$$-sY'(s) = 6Y(s) \Longrightarrow \frac{Y'(s)}{Y(s)} = -\frac{6}{s}$$

$$\ln Y(s) = -6\ln s + C \Longrightarrow Y(s) = \frac{e^C}{s^6}$$

Passo 3

$$y(t) = e^C \frac{t^5}{5!}$$

Como $y(1) = \dfrac{e^C}{5!} = 1$, temos:

$$y(t) = t^5$$

Questão 4 (2.5) Seja $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^2(1-e^{-3s})}\left(1-e^{-s}\right)^2$. Calcule a transformada inversa de $F(s)$ e trace seu gráfico.

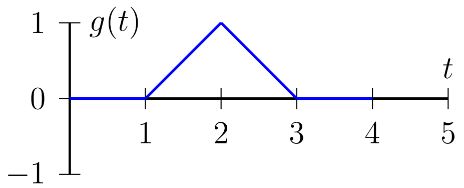
Solução

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2(1-e^{-3s})}\left(1-2e^{-s}+e^{-2s}\right) = \frac{e^{-s}-2e^{-2s}+e^{-3s}}{s^2(1-e^{-3s})}$$

Como $\dfrac{1}{1-e^{-3s}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-3ns}$, $s>0$, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$ pode ser escrito como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(t-3n)$$

onde $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}-2e^{-2s}+e^{-3s}}{s^2}\right\} = (t-1)u(t-1) - 2(t-2)u(t-2) + (t-3)u(t-3)$ cujo gráfico é dado por:



O gráfico da função $f(t)$ é, portanto, dado por: