Segunda avaliação - MAT01168 - MATEMÁTICA APLICADA II - Turma C

Nome: Cartão: Turma:

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente a sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas. Se precisar de folhas adicionais, solicite ao professor.
- É permitido o uso de calculadoras científicas sem recursos gráficos, de computação simbólica (ex. resolução de integrais) ou armazenamento de textos.

Formulário:

1. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
2. $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$
3. $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} a^{n-j} b^j$, $\binom{j}{k} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$

Questão 1 (3.0) Considere a função $f(t)$ dente-de-serra (quinto item da tabela gráfica):

a) (1.5) Represente a função $f(t)$ em termos de funções de Heaviside. Encontre a derivada $g(t) = f'(t)$. Esboce o gráfico de $g(t)$.

b) (1.5) Calcule as transformadas de Laplace $F(s)$ e $G(s)$. Obs.: Você deve mostrar esses resultados através de princípios básicos. Não copie resultados da tabela gráfica.

Solução Item a $f(t)$ pode ser expresso como

$$f(t) = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(t-an)\left[u(t-an)-u(t-a(n+1))\right] \tag{1}$$

ou[1] como

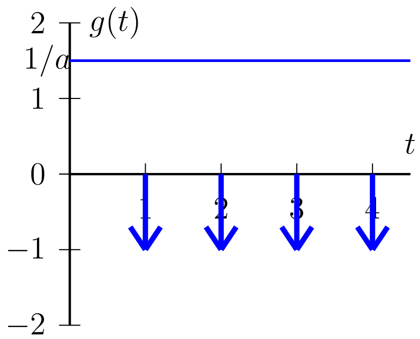
$$f(t) = \frac{t}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} u(t-an)$$

A função $g(t)$ pode ser obtida por inspeção ou via derivação algébrica, observando que $\frac{d}{dt}u(t-x) = \delta(t-x)$:

$$g(t) = f'(t) = \frac{1}{a} - \sum_{n=1}^{\infty}\delta(t-an) \tag{2}$$

[1]Obs. Embora não seja óbvio a primeira vista que esta duas expressões são equivalentes, a passagem de (1) para (2) pode ser feita como a seguir:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(t-an)\left[u(t-an)-u(t-a(n+1))\right] \\
&= \frac{t}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left[u(t-an)-u(t-a(n+1))\right] \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} n\, u(t-a(n+1)) - \sum_{n=0}^{\infty} n\, u(t-an) \\
&= \frac{t}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)u(t-an) - \sum_{n=1}^{\infty} n\, u(t-an) \\
&= \frac{t}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} u(t-an)
\end{aligned}$$



Item b A função $F(s)$ pode ser obtida diretamente de (1), usando tab(2) e a propriedade do deslocamento em s:

$$F(s) \;=\; \frac{1}{as^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ans}}{s} = \frac{1}{as^2} - \frac{1}{s}\frac{e^{-as}}{1-e^{-as}}$$

onde foi usada a soma da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ com $x = e^{-as}$. A função $G(s)$ pode ser obtida diretamente de (2), usando tab(1) e $\mathcal{L}\left\{\delta(t-x)\right\} = e^{-xs}$:

$$G(s) \;=\; \frac{1}{as} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ans} = \frac{1}{as} - \frac{e^{-as}}{1-e^{-as}}$$

Igualmente, poder-se-ia ter usado a propriedade da derivada para relacionar $F(s)$ com $G(s)$:

$$G(s) = sF(s) - f(0)$$

e, como $f(0) = 0$, temos $G(s) = sF(s)$.

Questão 2 (2.5) A concentração citoplasmática de determinada droga pode ser modelada pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$c'(t) = -\frac{1}{\tau}c(t) + q(t)$$

onde $q(t)$ representa ingestão da droga, τ é uma constante positiva chamada *clearance rate*. Considere que um paciente receba uma dose por dia desse medicamento (em horários idênticos) durante três dias. Sabendo que $\tau = 2$ dias e e que uma dose representa 2 ml/Kg. Faça o que se pede:

a) (0.5) Modele a injestão da droga como instantânea (impulsos) e defina $t = 0$ como o momento da administração da primeira dose. Expresse o termo $q(t)$ e esboce o gráfico. Use o dia como unidade de tempo.

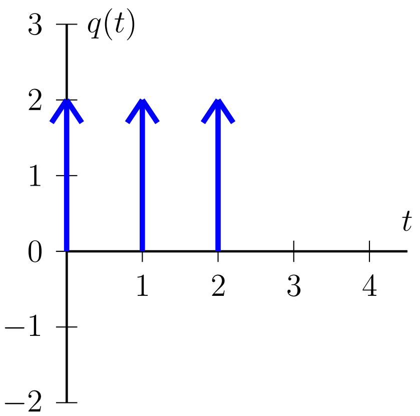
b) (1.0) Usando a técnica da Transformada de Laplace obtenha a solução $c(t)$. Considere nula a concetração antes do tratamento.

c) (1.0) Esboce o gráfico da solução $c(t)$ e calcule o valor da concentração máxima. Use o dia como unidade de tempo.

Solução

Item a

$$q(t) = 2\left[\delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2)\right]$$



Item b Passo 1

Definimos $C(s) = \mathcal{L}\{c(t)\}$ e $Q(s) = \mathcal{L}\{q(t)\} = 2\left(1 + e^{-s} + e^{-2s}\right)$.

Usamos a propriedade da lineraridade e da derivada para obter a equação subsidiária:

$$\left(sC(s) - \underbrace{c(0)}_{0}\right) = -\frac{1}{\tau}C(s) + Q(s)$$

Passo 2

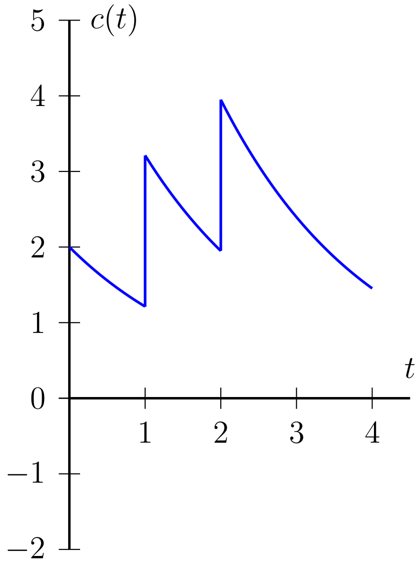
$$C(s)\left(s + \frac{1}{\tau}\right) = Q(s)$$

$$C(s) = \frac{Q(s)}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{2\left(1 + e^{-s} + e^{-2s}\right)}{s + 1/2}$$

Passo 3

Observamos de tab(7) que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/2}\right\} = e^{-t/2}$. Usando a propriedade do deslocamento em t, temos:

$$c(t) = 2\left[e^{-t/2} + u(t-1)e^{-(t-1)/2} + u(t-2)e^{-(t-2)/2}\right]$$



Item c

O valor máximo é obtido em $t = 2+$:

$$c(2+) = 2(e^{-1} + e^{1/2} + 1) \approx 3.95 ml/Kg$$

Questão 3 (2.0) Seja $f(t) = e^{at}$, demonstre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s+a}$.

a) (1.0) Diretamente da definição de Transformada de Laplace.

b) (1.0) Usando a técnica das séries de potência.

Solução do item a

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} \overbrace{=}^{def} \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right|_0^\infty \\ &= 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a \end{aligned}$$

Solução do item b

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1}{s^{n+1}} \\ &= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{s}\right)^n = \frac{1}{s}\frac{1}{1-\frac{a}{s}} = \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

Questão 4 (2.5) Usando procedimentos algébricos e as tabelas fornecidas, calcule as seguintes transformadas. Indique os ítens das tabela quando usar resultados tabelados.

a) (1.5) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-s}}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$

b) (1.0) $\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\sin^2(t)\right\}$

Solução item a

$$F(s)=\frac{s}{(s-2)(s^2+1)}=\left[\frac{A}{s-2}+\frac{Bs+C}{s^2+1}\right]$$

onde

$$A=\lim_{s\to 2}\frac{s}{s^2+1}=\frac{2}{5}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{Bs+C}{s^2+1} &= \frac{s}{(s-2)(s^2+1)}-\frac{A}{s-2}\\
Bs+C &= \frac{s}{(s-2)}-\frac{A(s^2+1)}{s-2}=\frac{s}{(s-2)}-\frac{2(s^2+1)}{5(s-2)}\\
&= \frac{5s-2(s^2+1)}{5(s-2)}=\frac{-2s^2+5s-2}{5(s-2)}=\frac{(s-2)(1-2s)}{5(s-2)}=\frac{1-2s}{5}
\end{aligned}$$

Logo

$$F(s)=\frac{2}{5}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1}-\frac{2}{5}\frac{s}{s^2+1}$$

e

$$\mathcal{L}\left\{F(s)\right\}=\frac{2}{5}e^{2t}+\frac{1}{5}\sin(t)-\frac{2}{5}\cos(t)$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{-s}F(s)\right\}=\left[\frac{2}{5}e^{2(t-1)}+\frac{1}{5}\sin(t-1)-\frac{2}{5}\cos(t-1)\right]u(t-1)$$

Solução item b

Primeiro observamos que

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2(x)-\sin^2(x)\\
1 &= \cos^2(x)+\sin^2(x)
\end{aligned}$$

logo

$$\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\sin^2(t)\right\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\left(1-\cos(2t)\right)\right\}\\
\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\sin^2(t)\right\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\cos(2t)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}-\frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2+4}=\frac{1}{2}\frac{s^2+4s+8-(s+2)^2}{(s+2)(s^2+4s+8)}\\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{(s+2)(s^2+4s+8)}=\frac{2}{(s+2)(s^2+4s+8)}
\end{aligned}$$