UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma B - 2012/1
Segunda avaliação - Grupo 2

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.
- É permitido o uso de calculadoras científicias simples, ou seja, sem recursos gráficos, de armazenamento de textos ou manipulação simbólica de expressões.

Formulário:

1. $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
2. $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
3. $\cos(t) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$
4. $\operatorname{sen}(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$
5. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)$
6. $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$
7. $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} a^{n-j} b^j$, $\dbinom{j}{n} = \dfrac{n!}{(n-j)!j!}$

• **Questão 1** (3.0 pontos): Considere o circuito RLC representado na figura abaixo:

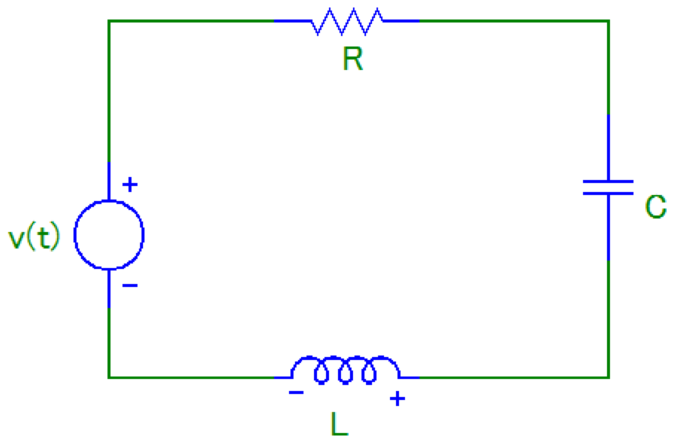


Figura 1: Circuito RLC

onde $R = 1\Omega$, $L = \dfrac{1}{2}H$ e $C = 2F$, a carga inicial no capacitor e a corrente incial na malha são nulas. Use a teoria das transformadas de Laplace para calcular a corrente $i(t)$ quando a tensão $v(t)$ na fonte é dada por

$$v(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < 2, \\ 10, & t > 2. \end{cases}$$

Esboce o gráfico corrente $i(t)$ como função tempo. Lembre que este circuito é governado pela seguinte equação:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q(0) + \int_0^t i(\tau)d\tau\right) = v(t).$$

Solução

$$v(t) = 5u(t) + 5u(t-2)$$

$$\left(Ls + R + \frac{1}{CS}\right) I(s) = V(s)$$

$$\left(LCs^2 + RCs + 1\right) I(s) = CsV(s)$$

$$I(s) = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} V(s)$$

$$I(s) = \frac{10s}{s^2 + 2s + 1}\left(\frac{1}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}\right)$$

$$I(s) = \frac{10}{(s+1)^2}\left(1 + e^{-2s}\right)$$

Sabemos que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = te^{-t}$$

por tab(8). Da propriedade do deslocamento em t, temos também

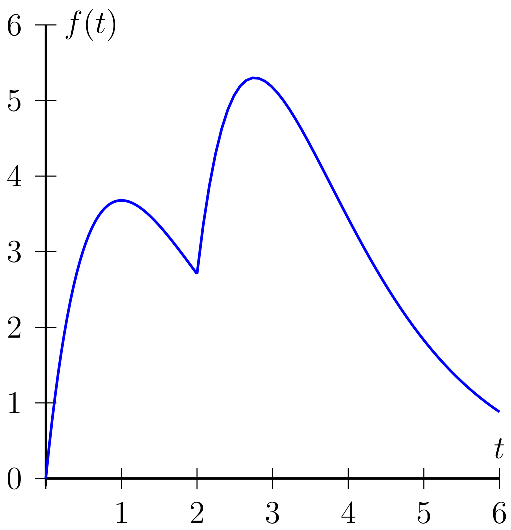
$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}\right\} = (t-2)e^{-(t-2)}u(t-2)$$

Portanto

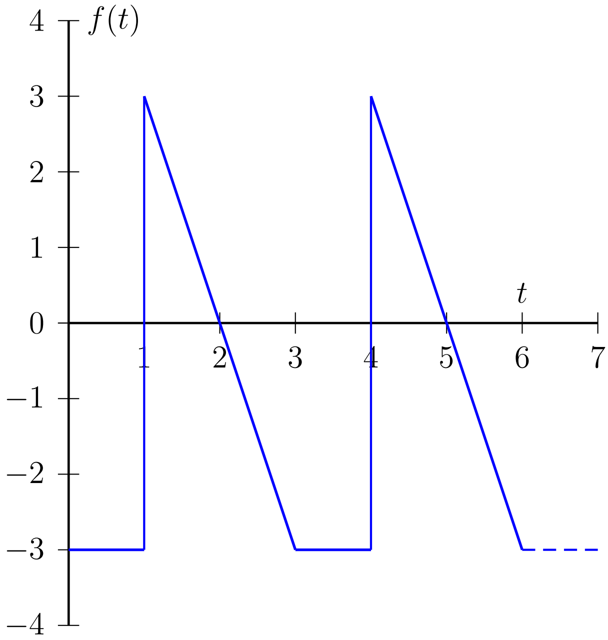
$$i(t) = 10te^{-t} + 10(t-2)e^{-(t-2)}u(t-2)$$

ou seja

$$i(t) = \begin{cases} 10te^{-t}, 0 \leq t < 2 \\ 10te^{-t} + 10(t-2)e^{-(t-2)} = 10\left(t + (t-2)e^{2}\right)e^{-t}, \quad t > 2 \end{cases}$$



• **Questão 2** (2.0 pontos): Considere a função períodica $f(t)$ de período 3 cujo gráfico é apresentado

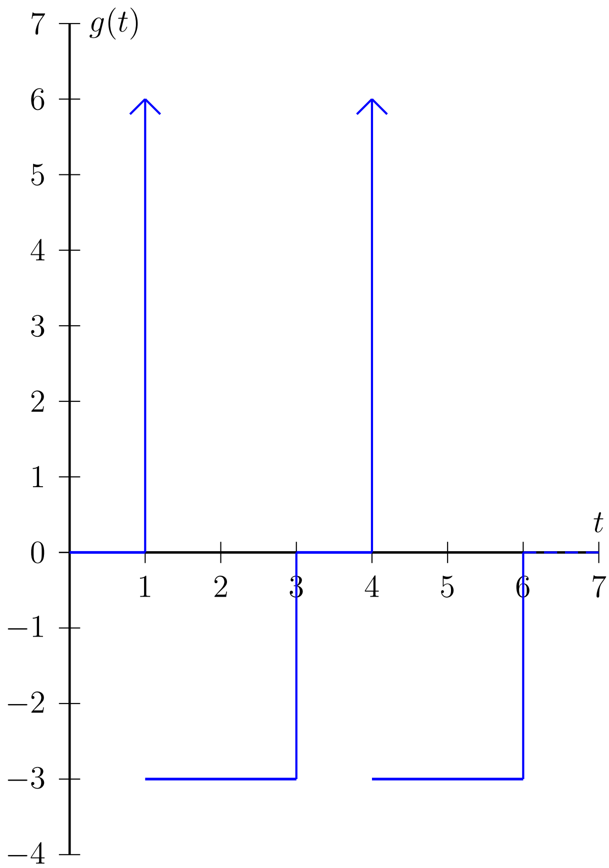


abaixo.

a) (0.5) Esboce o gráfico da derivada distribuicional $g(t) = f'(t)$.

b) (1.5) Obtenha a transformada de Laplace $G(s)$ de $g(t)$ e $F(s)$ de $f(t)$.

Solução item a



Solução item b Da propriedade da função periódica, temos:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{1-e^{-3s}}\int_0^3 g(t)dt = \frac{1}{1-e^{-3s}}\left[6e^{-s} - 3\int_1^3 e^{-st}dt\right] \\
&= \frac{1}{1-e^{-3s}}\int_0^3 g(t)dt = \frac{1}{1-e^{-3s}}\left[6e^{-s} - 3\left(\frac{e^{-3s}}{-s} - \frac{e^{-s}}{-s}\right)\right] \\
&= \frac{1}{1-e^{-3s}}\left[6e^{-s} - 3\frac{e^{-s}}{s} + 3\frac{e^{-3s}}{s}\right]
\end{aligned}
$$

Da propriedade da derivada temos:

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

como $f(0) = -3$, temos:

$$F(s) = \frac{G(s)}{s} - \frac{3}{s} = \frac{1}{1-e^{-3s}}\left[\frac{6e^{-s}}{s} - 3\frac{e^{-s}}{s^2} + 3\frac{e^{-3s}}{s^2}\right] - \frac{3}{s}$$

- **Questão 3** (2.0 pontos):Calcule as seguintes transformadas:

  a) (0.5) $\mathcal{L}\left\{e^{-t/2}t^2\sum_{k=0}^{3}\delta(t-2k)\right\}$

  b) (0.75) $\mathcal{L}\left\{t^2J_0(3t)\right\}$

  c) (0.75) $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}^3(wt)\right\}$

Solução item a

$$
\begin{aligned}
f(t) &= e^{-t}t^2\sum_{k=0}^{3}\delta(t-2k)\\
&= \sum_{k=0}^{3}e^{-t/2}t^2\delta(t-2k) = 0\delta(t) + 2^2e^{-1}\delta(t-2) + e^{-2}4^2\delta(t-4) + e^{-3}6^2\delta(t-6)\\
&= 4e^{-1}\delta(t-2) + 16e^{-2}\delta(t-4) + 36e^{-3}\delta(t-6)\\
\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} &= 4e^{-1}e^{-2s} + 16e^{-2}e^{-4s} + 36e^{-3}e^{-6s}
\end{aligned}
$$

Solução item b

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^2J_0(3t)\right\} &= \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\left\{J_0(3t)\right\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+9}}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\left(s^2+9\right)^{-1/2} = -\frac{d}{ds}\left[\left(s^2+9\right)^{-3/2}s\right]\\
&= -\left[-3\left(s^2+9\right)^{-5/2}s^2 + \left(s^2+9\right)^{-3/2}\right] = \frac{3s^2-(s^2+9)}{(s^2+9)^{5/2}} = \frac{2s^2-9}{(s^2+9)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

Solução item c

$$
f(t) = \operatorname{sen}^3(wt) = \left(\frac{e^{iwt}-e^{-iwt}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3iwt}-3e^{iwt}+3e^{-iwt}-e^{-3iwt}}{-8i} = \frac{3\operatorname{sen}(wt)-\operatorname{sen}(3wt)}{4}
$$

$$
\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{3}{4}\frac{w}{s^2+w^2} - \frac{1}{4}\frac{3w}{s^2+w^2}
$$

- **Questão 4** (3.0 pontos):Resolva a seguinte equação íntegro-diferencial de Volterra:

$$y'(t) + y(t) - 3e^t \int_0^t y(\tau)e^{-\tau}d\tau = 2e^{-3t}$$

Usando a técnica das transformadas de Laplace sabendo que $y(0) = 2$.
Solução:

$$y'(t) + y(t) - 3y(t) * e^t = 2e^{-3t}$$

$$sY(s) - 2 + Y(s) - \frac{3}{s-1}Y(s) = \frac{2}{s+3}$$

$$Y(s)\left[s + 1 - \frac{3}{s-1}\right] = \frac{2}{s+3} + 2$$

$$Y(s)\left[\frac{(s+1)(s-1)-3}{s-1}\right] = 2\frac{s+4}{s+3}$$

$$Y(s)\left[\frac{s^2-4}{s-1}\right] = 2\frac{s+4}{s+3}$$

$$Y(s) = 2\frac{(s-1)(s+4)}{(s+3)(s^2-4)}$$

$$Y(s) = 2\frac{s^2+3s-4}{(s+3)(s-2)(s+2)}$$

$$Y(s) = 2\frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+2}$$

onde

$$A = \lim_{s\to-3} \frac{s^2+3s-4}{(s-2)(s+2)} = \frac{9-9-4}{(-5)(-1)} = -\frac{4}{5}$$

$$B = \lim_{s\to2} \frac{s^2+3s-4}{(s+3)(s+2)} = \frac{4+6-4}{(5)(4)} = \frac{3}{10}$$

$$C = \lim_{s\to-2} \frac{s^2+3s-4}{(s+3)(s-2)} = \frac{4-6-4}{(1)(-4)} = \frac{3}{2}$$

$$y(t) = -\frac{8}{5}e^{-3t} + \frac{3}{5}e^{2t} + 3e^{-2t}$$