UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2012/2
Segunda avaliação - Grupo 1

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Ao usar sistemas de coordenadas curvilíneas (cilíndricas, esféricas etc), indique a correspondência para o sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z).
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.

Formulário:

1. $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
2. $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
3. $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$
4. $\operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$
5. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)$
6. $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$
7. $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} a^{n-j} b^j$, $\binom{j}{n} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$

• **Questão 1** (2.5 pontos): Encontre a função $f(t)$ cuja transformada de Laplace é dada por

$$F(s)=\frac{1}{(s+\ln(2))(1-e^{-2s})}$$

e esboce o gráfico de $f(t)$ para t entre 0 e 5. Indique no gráfico todas os valores notáveis (pontos de máximo, mínimo e extremos de intervalo). Deixe claro como você obteve estes valores notáveis.

Solução Primeiro observamos que o termo $\frac{1}{1-e^{-2s}}$ pode ser expandido em série de potências conforme

$$\frac{1}{1-e^{-2s}}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2ks}=1+e^{-2s}+e^{-4s}+e^{-6s}+e^{-8s}+\cdots$$

assim temos:

$$F(s) = \frac{1}{(s+\ln(2))(1-e^{-2s})}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+\ln(2))}e^{-2ks}$$

A transformada inversa do termo $\frac{1}{s+\ln(2)}$ é dada pelo item 7 da tabela:

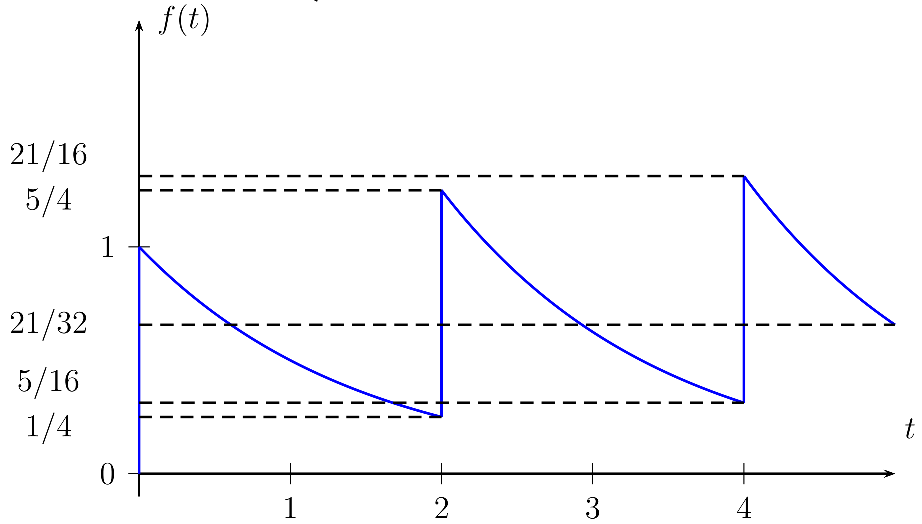
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\ln(2)}\right\}=e^{-t\ln 2}=2^{-t}$$

Agora calculamos, usando a propriedade do deslocamente no eixo t:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\ln(2))}e^{-2ks}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}u(t-2k)2^{-(t-2k)}$$

Para traçar o gráfico, verificamos que a função $f(t)$ entre 0 e 5 é dada por:

$$f(t)=\begin{cases} 2^{-t}, & 0<t<2,\\ 2^{-t}+2^{-(t-2)}, & 2<t<4,\\ 2^{-t}+2^{-(t-2)}+2^{-(t-4)}, & 4<t<5.\end{cases}$$



Para obter os valores notáveis, basta calcular:

$$\begin{aligned}
f(0+) &= \lim_{t\to 0+} f(t)=2^{0}=1\\
f(2-) &= \lim_{t\to 2-} f(t)=2^{-2}=1/4\\
f(2+) &= \lim_{t\to 2+} f(t)=2^{-2}+2^{0}=5/4\\
f(4-) &= \lim_{t\to 4-} f(t)=2^{-4}+2^{-2}=5/16\\
f(4+) &= \lim_{t\to 4+} f(t)=2^{-4}+2^{-2}+2^{0}=21/16\\
f(5) &= 2^{-5}+2^{-3}+2^{-1}=21/32
\end{aligned}$$

• **Questão 2** (2.5 pontos): Considere o mecanismo simplificado de reação química apresentado a seguir:

$$R \longrightarrow S \longrightarrow T$$

onde a concentração de R, S e T são dadas em mol/l por $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, respectivamente e são regidas pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\alpha x(t) \\ y'(t) &= \alpha x(t) + \gamma y(t) \\ z'(t) &= \gamma y(t), \end{aligned}$$

onde α e γ são constantes positivas. Sabendo que as concentrações iniciais são dadas por:

$$x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = 0.$$

Usando a teoria das Transformadas de Laplace, obtenha a solução dada pelas funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ quando $\alpha = 1$, e $\gamma = 2$.

Solução Calculamos a Transformada de Laplace do sistema usado a propriedade da linearidade e da derivada:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= -\alpha X(s) \\ sY(s) - y(0) &= \alpha X(s) - \gamma Y(s) \\ sZ(s) - z(0) &= \gamma Y(s). \end{aligned}$$

Da primeira equação, temos:

$$X(s) = \frac{x(0)}{s+\alpha} = \frac{1}{s+1} \tag{1}$$

Da segunda equação, temos:

$$Y(s) = \frac{\alpha X(s)}{s-\gamma} = \frac{\alpha x(0)}{(s-\gamma)(s+\alpha)} = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

Da terceira equação temos:

$$Z(s) = \frac{\gamma Y(s)}{s} = \frac{2}{s(s+1)(s-2)}$$

Agora, podemos obter as incógnitas através da Transformada Inversa de Laplace:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = e^{-t} \quad \text{por tab(7)} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} \quad \text{por tab(11) com } a = 2 \text{ e } b = -1 \\ z(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Z(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Y(s)}{s}\right\} = 2\int_0^t y(\tau)d\tau, \quad \text{por prop(5)} \\ &= \frac{2}{3}\int_0^t \left(e^{2\tau} - e^{-\tau}\right)d\tau = \frac{2}{3}\left(\frac{e^{-2t}-1}{2} - \frac{e^{-t}-1}{-1}\right) = \frac{2e^{-t} + e^{2t} - 3}{3} \end{aligned}$$

- **Questão 3** (3.0) Calcule as transformadas:
  - **Item a** (0.75) $\mathcal{L}\{t\ln t\}$
  - **Item b** (0.75) $\mathcal{L}\{(t-3)u(t-1)-(t-1)u(t-3)\}$
  - **Item c** (1.5) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+6s^2+13s+12}{(s^2+2s+5)(s^2+2s+1)}+\frac{6e^{-s}}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right\}$

  Solução item a Pela propriedade da derivada da transformada, temos:

$$\mathcal{L}\{t\ln t\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\ln t\}$$

Pelo item 38 da tabela de Transformadas e da propriedade da linearida, temos:

$$\mathcal{L}\{-\ln t\} = \mathcal{L}\{-\ln t-\gamma\}+\mathcal{L}\{\gamma\} = \frac{\ln s}{s}+\frac{\gamma}{s}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\ln t\} &= \frac{d}{ds}\left[\frac{\ln s}{s}+\frac{\gamma}{s}\right] = \left[\frac{1}{s}\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\ln s-\frac{\gamma}{s^2}\right]\\
&= \frac{-\ln s+(1-\gamma)}{s^2}
\end{aligned}$$

Solução do item b Primeiro observamos que

$$(t-3)u(t-1)-(t-1)u(t-3) = f(t-1)u(t-1)-g(t-3)u(t-3)$$

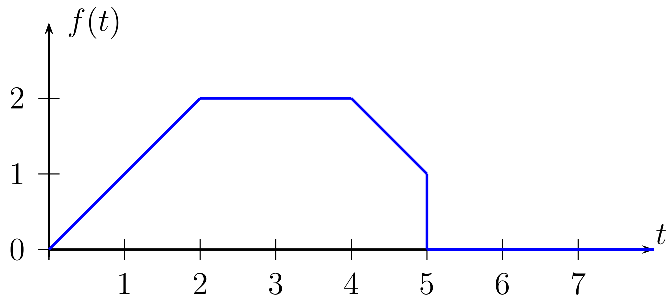
onde $f(t)=t-2$ e $g(t)=t+2$ Assim, podemos usar a propriedade do deslocamento no eixo t:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(t-3)u(t-1)-(t-1)u(t-3)\} &= \mathcal{L}\{f(t-1)u(t-1)-g(t-3)u(t-3)\}\\
&= F(s)e^{-s}-G(s)e^{-3s} = \left(\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s}\right)e^{-s}-\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)e^{-3s}
\end{aligned}$$

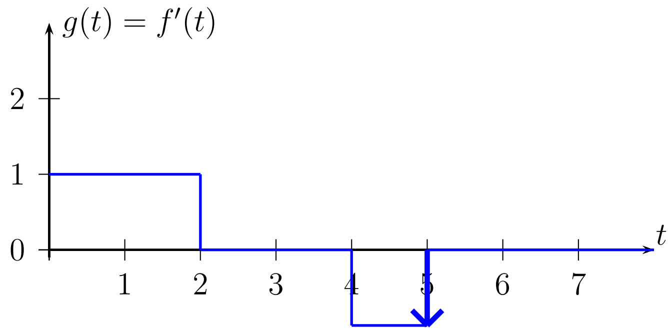
Solujao do item c Procedendo com a decomposição em frações parcias temos:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+6s^2+13s+12}{(s^2+2s+5)(s^2+2s+1)}+\frac{6e^{-s}}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\frac{2}{s^2+2s+5}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)}\right]+e^{-s}\left[\frac{3}{s+1}-\frac{6}{s+2}+\frac{3}{s+3}\right]\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)}\right]+e^{-s}\left[\frac{3}{s+1}-\frac{6}{s+2}+\frac{3}{s+3}\right]\right\}\\
&= e^t\left[\operatorname{sen}(2t)+t+1\right]+u(t-1)\left[3e^{-(t-1)}-6e^{-(t-1)}+3e^{-3(t-1)}\right]
\end{aligned}$$

• **Questão 4** (2.0) Considere a função $f(t)$ cujo gráfico é dado abaixo



Esboce o gráfico da derivada $g(t)$ desta função e calcule as Transformadas de Laplace $F(s)$ e $G(s)$.
Reposta:



Assim, é fácil ver que

$$g(t) = u(t) - u(t-2) - u(t-4) + u(t-5) - \delta(t-5)$$

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-2} - \frac{1}{s}e^{-4} + \frac{1}{s}e^{-5} - e^{-5} = \frac{1}{s}\left[1 - e^{-2} - e^{-4} + e^{-5}\right] - e^{-5}$$

Usamos a propriedade da derivada:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) = sF(s)$$

Portanto,

$$F(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s^2}\left[1 - e^{-2} - e^{-4} + e^{-5}\right] - \frac{1}{s}e^{-5}$$