UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2015/1
Prova da área IA

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ____________

Regras a observar:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Mantenha a caderno de questões grampeado.
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$	
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$	

Propriedades:

Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s),$ onde $(f*g)(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\displaystyle\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty F(s)ds$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\operatorname{senh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, ...$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \displaystyle\int_0^\infty x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$

Integrais:

$\displaystyle\int xe^{\lambda x}\,dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\displaystyle\int x^2e^{\lambda x}\,dx = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\displaystyle\int x^ne^{\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}dx + C$
$\displaystyle\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\displaystyle\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

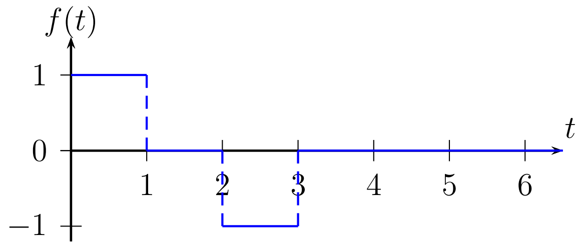
Tabela de transformadas de Laplace:

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n}, \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
$\frac{1}{s^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}, \qquad (n = 1, 2, 3...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
$\frac{1}{(s-a)^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
$\frac{1}{s^2+w^2}$	$\frac{1}{w}\,\text{sen}(wt)$
$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\,\text{senh}(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\,\text{sen}(wt)$
$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
$\frac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
$\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt - \text{sen}(wt))$
$\frac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\text{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
$\frac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}\,\text{sen}(wt)$
$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
$\frac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\text{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}, \qquad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
$\frac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\text{sen}(at)\cosh(at) -$ $- \cos(at)\,\text{senh}(at)]$
$\frac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\,\text{sen}(at)\,\text{senh}(at))$
$\frac{1}{(s^4-a^2)}$	$\frac{1}{2a^3}(\text{senh}(at) - \text{sen}(at))$

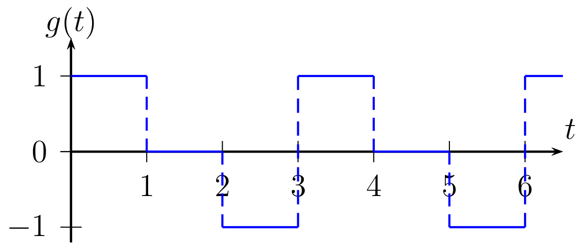
$\frac{s}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$
$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
$\frac{1}{(s^2-a^2)^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \qquad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{\pi t})$
$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\text{senh}(2\sqrt{\pi t})$
$e^{-k\sqrt{s}}, \qquad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \qquad (\gamma \approx 0,5772)$
$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cos(wt))$
$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cosh(at))$
$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{s}\,\text{sen}(wt)$
$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\text{Si}\,(t)$
$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} t/a, & 0 < t < a \\ -t/a+2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
$\frac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \text{sen}(wt), & 0 < t < \pi/w \\ 0, & \pi/w < t < 2\pi/w \end{cases}$ $f(t+2\pi/w) = f(t), \quad t > 0$
$\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert\text{sen}(wt)\rvert$
$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s\,(1-e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t) = t/a, \qquad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

• **Questão 1** (2.5 pontos) (Cálculo de transformada de Laplace).

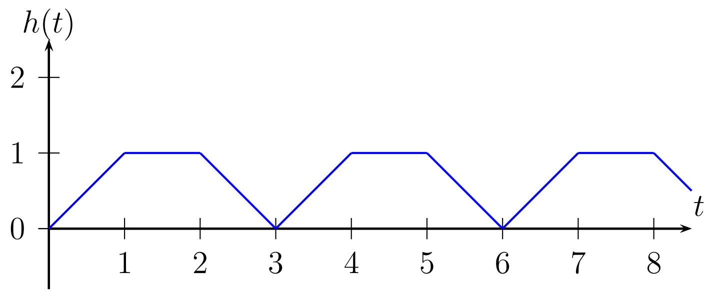
a) (0.5) Escreva a função dada no gráfico abaixo em termo da função de Heaviside e calcule sua transformada de Laplace.



b) (1.0) Use o resultado do item a) e a propriedade de funções periódicas para calcular a transformada de Laplace da função periódica dada no gráfico abaixo.



c) (1.0) Calcule a transformada de Laplace da função periódica dada no gráfico abaixo usando a propriedade da derivada.



• **Questão 2** (2.5 pontos): Considere o sistema massa-mola-amortecedor dado por:

$$\begin{aligned} y''(t) + 2y'(t) + y(t) &= f(t) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0, \end{aligned}$$

Resolva o sistema e esboce os gráficos das soluções para cada termo fonte $f(t)$ dado:

a)(1.0) $f(t) = \delta(t-1)$

b)(1.5) $f(t) = u(t-1)$

- **Questão 3** (2.5 pontos): Resolva a seguinte equação integro-diferencial

$$\begin{aligned} t - 2f'(t) &= \int_0^t (e^{\tau} + e^{-\tau}) f(t-\tau) d\tau \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

• **Questão 4** (2.5 pontos) (Delta de Dirac) Considere a seguinte função pulso:

$$f_\epsilon = \frac{u(t-(2-\epsilon)) - u(t-2)}{\epsilon},$$

onde $u(t)$ é a função de Heaviside.

a) (0.5) Esboce o gráfico da função $f_\epsilon(t)$ para $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, $\epsilon = \dfrac{1}{4}$ e $\epsilon = \dfrac{1}{8}$.

b) (1.0) Calcule a transformada de Laplace de $f_\epsilon(t)$ e calcule a limite da transformada quando ϵ tende a zero.

c) (1.0) Calcule a transformada de Laplace de $\delta(t-2)$ usando a propriedade da filtragem e use o item b) para explicar o resultado obtido.