UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2015/1
Prova da área IA

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras a observar:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Mantenha a caderno de questões grampeado.
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$	
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$	

Propriedades:

Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s),$ onde $\quad (f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)ds$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, ...$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

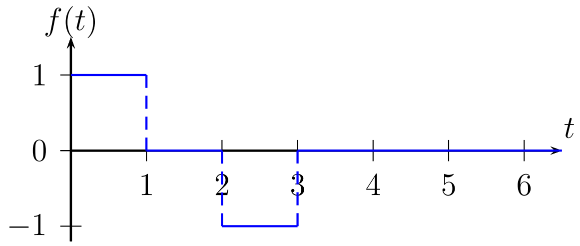
Tabela de transformadas de Laplace:

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n}, \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
$\frac{1}{s^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}, \qquad (n = 1, 2, 3...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
$\frac{1}{(s-a)^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
$\frac{1}{s^2+w^2}$	$\frac{1}{w}\,\mathrm{sen}(wt)$
$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\,\mathrm{senh}(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\,\mathrm{sen}(wt)$
$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
$\frac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
$\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt - \mathrm{sen}(wt))$
$\frac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\mathrm{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
$\frac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}\,\mathrm{sen}(wt)$
$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
$\frac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\mathrm{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}, \qquad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
$\frac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\mathrm{sen}(at)\cosh(at) -$ $- \cos(at)\,\mathrm{senh}(at)]$
$\frac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\,\mathrm{sen}(at)\,\mathrm{senh}(at))$
$\frac{1}{(s^4-a^2)}$	$\frac{1}{2a^3}(\mathrm{senh}(at) - \mathrm{sen}(at))$

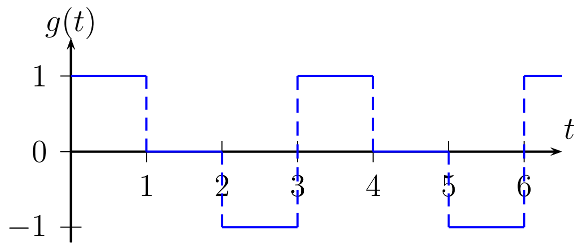
$\frac{s}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$
$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
$\frac{1}{(s^2-a^2)^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \qquad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{\pi t})$
$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{senh}(2\sqrt{\pi t})$
$e^{-k\sqrt{s}}, \qquad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \qquad (\gamma \approx 0,5772)$
$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cos(wt))$
$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cosh(at))$
$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{s}\,\mathrm{sen}(wt)$
$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\mathrm{Si}\,(t)$
$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} t/a, & 0 < t < a \\ -t/a + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
$\frac{w}{(s^2+w^2)\left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \mathrm{sen}(wt), & 0 < t < \pi/w \\ 0, & \pi/w < t < 2\pi/w \end{cases}$ $f(t + 2\pi/w) = f(t), \quad t > 0$
$\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert\mathrm{sen}(wt)\rvert$
$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s\left(1 - e^{-as}\right)}$	Onda dente de serra $f(t) = t/a, \qquad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

• **Questão 1** (2.5 pontos) (Cálculo de transformada de Laplace).

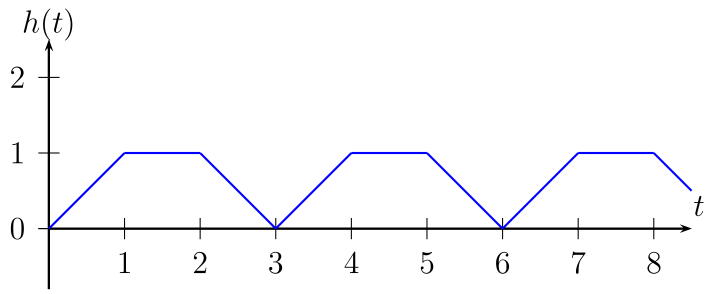
a) (0.5) Escreva a função dada no gráfico abaixo em termo da função de Heaviside e calcule sua transformada de Laplace.



b) (1.0) Use o resultado do item a) e a propriedade de funções periódicas para calcular a transformada de Laplace da função periódica dada no gráfico abaixo.



c) (1.0) Calcule a transformada de Laplace da função periódica dada no gráfico abaixo usando a propriedade da derivada.



Solução:

a) A função $f(t)$ pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = u(t) - u(t-1) - u(t-2) + u(t-3).$$

Usando o a tabela de propriedades

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s}\right)\left(1 - e^{-2s}\right).$$

b) Usando o fato que a função possui período 3 e usando a propriedade de funções periódicas, temos:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-3s}} \int_0^3 g(t)e^{-st}dt.$$

Pelo item a), temos que $f(x) = g(x)$ no intervalo $[0, 3]$, ou seja,

$$\int_0^3 g(t)e^{-st}dt = \int_0^3 f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s}\right)\left(1 - e^{-2s}\right).$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{\left(1 - e^{-s}\right)\left(1 - e^{-2s}\right)}{s\left(1 - e^{-3s}\right)}.$$

c)
$$\mathcal{L}\{h'(t)\} = s\mathcal{L}\{h(t)\} - h(0).$$
ou seja,
$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{h'(t)\} - \frac{1}{s}h(0).$$
Como $h(0) = 0$ e $\mathcal{L}\{h'(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$ é dada no item b) temos:
$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{\left(1 - e^{-s}\right)\left(1 - e^{-2s}\right)}{s^2\left(1 - e^{-3s}\right)}.$$

• **Questão 2** (2.5 pontos): Considere o sistema massa-mola-amortecedor dado por:

$$\begin{aligned} y''(t) + 2y'(t) + y(t) &= f(t) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0, \end{aligned}$$

Resolva o sistema e esboce os gráficos das soluções para cada termo fonte $f(t)$ dado:

a)(1.0) $f(t) = \delta(t-1)$

b)(1.5) $f(t) = u(t-1)$

Solução:

a) Aplicando a transformada de Laplace e usando a propriedade da transformada da derivada, temos

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = e^{-s}$$

onde usando a notação $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$. Logo,

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2},$$

ou seja,

$$y(t) = (t-1)e^{-(t-1)}u(t-1),$$

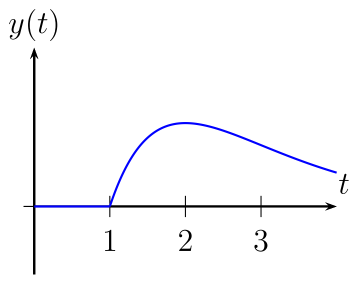
onde usamos as propriedades de translação nos eixos t e s. Para esboçar o gráfico, olhamos a função da forma

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ (t-1)e^{-(t-1)}, & t > 1 \end{cases}.$$

Observe que a expressão $(t-1)e^{-(t-1)}$ vale 0 quando $t = 1$ e tende a zero no infinito. Além disso, podemos calcular um ponto de máximo fazendo a derivada igual a zero:

$$-(t-1)e^{-(t-1)} + e^{-(t-1)} = 0 \Rightarrow (-t+2)e^{-(t-1)} = 0,$$

isto é, $t = 2$. Em $t = 2$, a expressão $(t-1)e^{-(t-1)}$ vale $\dfrac{1}{e} \approx 0,37$. Com essas informações podemos traçar um esboço do gráfico.



b) Aplicando a transformada de Laplace e usando a propriedade da transformada da derivada, temos

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

onde usando a notação $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$. Logo,

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)^2}.$$

Usando frações parciais, temos

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B+Cs}{(s+1)^2} = \frac{A(s^2+2s+1) + (B+Cs)s}{s(s+1)^2}.$$

Logo, $A + C = 0$, $2A + B = 0$ e $A = 1$. Assim, $A = 1$ implica em $C = -1$ e $B = -2$. Portanto,

$$Y(s) = e^{-s}\left(\frac{1}{s} + \frac{-2-s}{(s+1)^2}\right) = e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1+s}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2}\right) = e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right).$$

A transformada inversa pode ser obtida pela tabela:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t-1)\left(1 - e^{-(t-1)} - (t-1)e^{-(t-1)}\right) \\ &= u(t-1)\left(1 - te^{-(t-1)}\right) \end{aligned}$$

onde usamos as propriedades de translação nos eixos t e s. Para esboçar o gráfico, olhamos a função da forma

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ 1 - te^{-(t-1)}, & t > 1 \end{cases}.$$

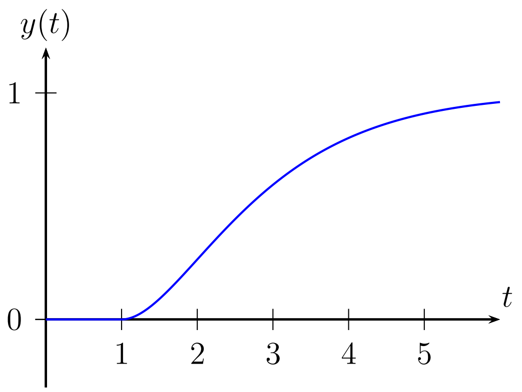
Observe que a expressão $1 - te^{-(t-1)}$, vale 0 quando $t = 1$ e tende a 1 no infinito. Além disso, podemos calcular um ponto de máximo fazendo a derivada igual a zero:

$$te^{-(t-1)} - e^{-(t-1)} = 0 \Rightarrow (t-1)e^{-(t-1)} = 0,$$

isto é, $t = 1$. Isso significa que a função não possui pontos de máximo e mínimo para $t > 1$ e é crescente. Podemos olhar algum ponto de inflexão fazendo a segunda derivada igual a zero:

$$-te^{-(t-1)} + e^{-(t-1)} + e^{-(t-1)} = 0 \Rightarrow (2-t)e^{-(t-1)} = 0,$$

ou seja, a função possui um ponto de inflexão em $t = 2$ e $y(2) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0,26$. Com essas informações podemos traçar um esboço do gráfico.



• **Questão 3** (2.5 pontos): Resolva a seguinte equação integro-diferencial

$$\begin{aligned} t - 2f'(t) &= \int_0^t (e^\tau + e^{-\tau}) f(t-\tau) d\tau \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Solução: Aplicamos a transformada de Laplace:

$$\frac{1}{s^2} - 2sF(s) = \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} \right) F(s),$$

onde usamos a propriedade da transformada de derivada e a propriedade da convolução. Assim,

$$\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} + 2s \right) F(s) = \frac{1}{s^2},$$

ou seja,

$$\left(\frac{s+1+s-1+2s(s-1)(s+1)}{(s-1)(s+1)} \right) F(s) = \frac{1}{s^2},$$

Logo,

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \frac{(s^2-1)}{2s^3} = \frac{(s^2-1)}{2s^5} = \frac{1}{2s^3} - \frac{1}{2s^5}.$$

Portanto, usando a tabela de transformadas, temos:

$$f(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48}.$$

• **Questão 4** (2.5 pontos) (Delta de Dirac) Considere a seguinte função pulso:

$$f_\epsilon = \frac{u(t-(2-\epsilon)) - u(t-2)}{\epsilon},$$

onde $u(t)$ é a função de Heaviside.

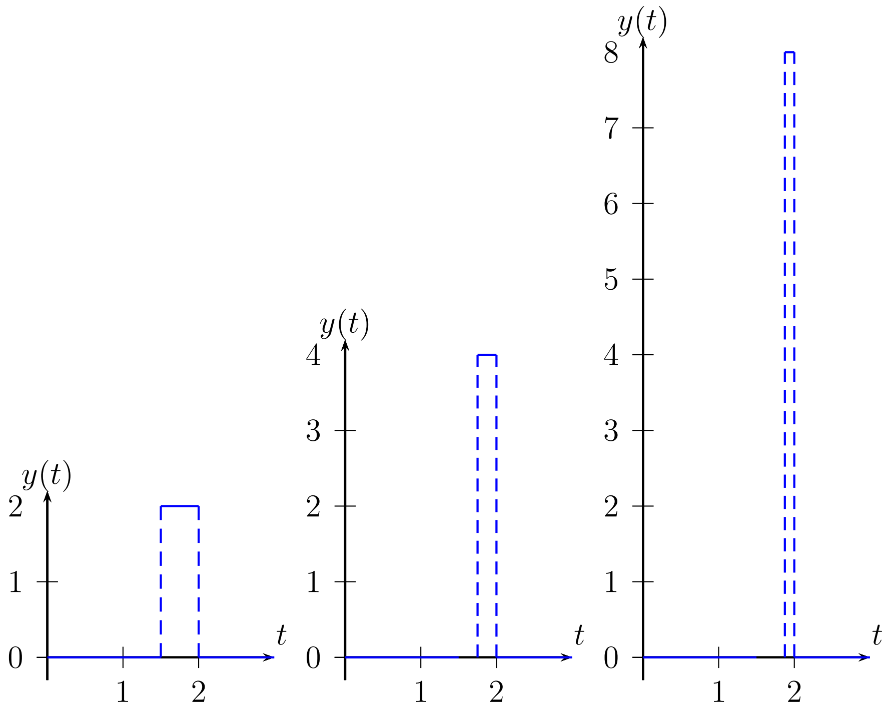
a) (0.5) Esboce o gráfico da função f_ϵ para $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\epsilon = \frac{1}{4}$ e $\epsilon = \frac{1}{8}$.

b) (1.0) Calcule a transformada de Laplace de $f_\epsilon(t)$ e calcule a limite da transformada quando ϵ tende a zero.

c) (1.0) Calcule a transformada de Laplace de $\delta(t-2)$ usando a propriedade da filtragem e use o item b) para explicar o resultado.

Solução:

a)



b) Usando as propriedades da Linearidade e da transformada da função de Heaviside, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f_\epsilon\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{u(t-(2-\epsilon)) - u(t-2)}{\epsilon}\right\} \\
&= \frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}\{u(t-(2-\epsilon))\} - \frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}\{u(t-2)\} \\
&= \frac{e^{-(2-\epsilon)s}}{\epsilon s} - \frac{e^{-2s}}{\epsilon s}
\end{aligned}$$

Agora, usando regra de L'Hôpital, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{L}\{f_\epsilon\} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{e^{-(2-\epsilon)s}}{\epsilon s} - \frac{e^{-2s}}{\epsilon s} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{e^{-(2-\epsilon)s} - e^{-2s}}{\epsilon s} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{se^{-(2-\epsilon)s}}{s} \\
&= \frac{se^{-2s}}{s} = e^{-2s}.
\end{aligned}$$

c) Pela regra da filtragem, $\mathcal{L}\{\delta(t-2)\} = e^{-2s}$, resultado que coincide com item b). Observe que a função delta de Dirac é definida pelo limite de f_ϵ quando $\epsilon \to 0$ e satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)dt = 1 = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(t)dt.$$

Lembre-se que, segundo a interpretação do cálculo diferencial e integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(t)dt = \int_{-\infty}^{2} 0dt + \int_{2}^{\infty} 0 f_\epsilon(t)dt = 0,$$

porém, segundo a definição da função Delta de Dirac podemos passar o limite para dentro da integral desde que $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(t) = \delta(t-2)$. Logo,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{\delta(t-2)\}.$$