UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2015/2
Prova da área IA

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras a observar:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$	
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(s)ds$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, \ldots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,dx = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,dx = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,dx = \dfrac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}dx + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n = 1, 2, 3...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2+w^2}$	$\frac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\operatorname{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt - \operatorname{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\operatorname{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\operatorname{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)},$ $(a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\operatorname{sen}(at)\cosh(at) -$ $- \cos(at)\operatorname{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at))$
27	$\frac{1}{(s^4-a^2)}$	$\frac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}(at) - \operatorname{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
33	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \quad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\operatorname{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\operatorname{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert\operatorname{sen}(wt)\rvert$
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t) = \frac{t}{a}, \quad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

• **Questão 1** (2.0 pontos) Resolva a seguinte equação integral:

$$f(t) + 2\int_0^t f(t-\tau)\cos(\tau)d\tau = 4e^{-t} + \text{sen}(t)$$

Solução: Aplicamos a transformada de Laplace para obter:

$$F(s) + 2\frac{s}{s^2+1}F(s) = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

Logo,

$$F(s)\left[\frac{s^2+1+2s}{s^2+1}\right] = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

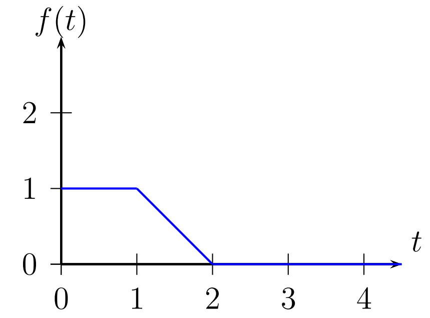
ou seja,

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{4(s^2+1)}{(s+1)^3} + \frac{s^2+1}{(s^2+1)(s+1)^2} \\
&= \frac{4(s^2+1)}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} \\
&= 4\frac{(s+1)^2-2s}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} \\
&= 4\frac{1}{s+1} - 8\frac{s}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} \\
&= 4\frac{1}{s+1} - 8\frac{s+1-1}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} \\
&= 4\frac{1}{s+1} - 8\frac{1}{(s+1)^2} + 8\frac{1}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} \\
&= 4\frac{1}{s+1} - 7\frac{1}{(s+1)^2} + 8\frac{1}{(s+1)^3}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(t) = 4e^{-t} - 7te^{-t} + 4t^2e^{-t}.$$

• **Questão 2** (2.5 pontos) Considere a função $f(t)$ dada no gráfico abaixo:



Faça o que se pede:

a) (0.5) Escreva $f(t)$ usando a função de Heaviside e calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

b) (1.0) Esboce o gráfico da função $g(t) = tf(t)$, escreva uma expressão para $g(t)$ em termos da função de Heaviside e calcule $\mathcal{L}\{g(t)\}$.

c) (1.0) Calcule $\mathcal{L}\left\{t^3\cos(2\pi t)f(t)\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Solução a)

$$f(t) = u(t) - (t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

e

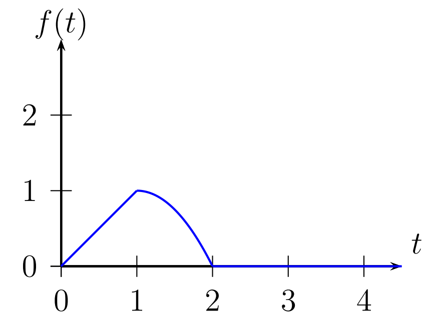
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

Solução b) $g(t)$ pode ser escrita na forma:

$$g(t) = tu(t) + (2-t)tu(t-1) - tu(t-1) + (t-2)tu(t-2)$$

Usando a propriedade da derivada da transformada, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{tf(t)\} &= -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}\right]\\ &= \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^3} - \frac{e^{-s}}{s^2} + 2\frac{e^{-2s}}{s^2} + 2\frac{e^{-2s}}{s^3}\end{aligned}$$



Solução c) Usando a propriedade da filtragem, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t^3\cos(2\pi t)\left(t-\frac{1}{2}\right)f(t)\right\} &= \int_0^\infty t^3\cos(2\pi t)\left(t-\frac{1}{2}\right)f(t)e^{-st}dt\\ &= \frac{1}{2^3}\cos(\pi)f\left(\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}s}\\ &= -\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}s}\end{aligned}$$

• **Questão 3** (1.5 pontos) Use técnicas algébricas, propriedades das transformadas de Laplace e as tabelas fornecidas para calcular a transformada inversa de Laplace da seguinte função:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2(1-e^{-s})}$$

[Dica: use uma expansão em série de Taylor para $\frac{1}{1-e^{-s}}$]

SoluçãoPrimeiro usamos uma expansão em série de Taylor para escrever

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ns}.$$

Depois, deixamos as exponenciais um pouco de lado e separamos em frações parciais os demais termos:

$$\frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} = \frac{A(s+2)^2 + Bs(s+2) + sC}{s(s+2)^2}.$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 4A + 2B + C = 1 \\ 4A = 1 \end{cases}$$

com solução $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{2}$. Assim

$$\frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s+2)} - \frac{1}{2(s+2)^2}$$

A transformada inversa de Laplace da última expressão é

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t}.$$

A multiplicação por e^{-ns} é uma translação no eixo t, portanto, pela propriedade 4, temos:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t-n) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2(t-n)} + \frac{1}{2}(t-n)e^{-2(t-n)} \right)$$

• **Questão 4** (4.0 pontos) A temperatura em um forno industrial evolui no tempo conforme o seguinte modelo simplificado:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -4v(t) + q(t)$$

onde $v(t)$ representa a temperatura medida no forno e $q(t)$ é a potência de aquecimento. Considere $v(0) = 18$ e use as técnicas de transformadas de Laplace para resolver o que se pede:

a) (1.5) Calcule a temperatura $v(t)$ quando $q(t) = 180\delta(t-1)$.

b) (2.5) Suponha, agora, que a temperatura é regulada por um sistema de controle automático que reage conforme a seguinte equação:

$$\frac{dq(t)}{dt} = 4\left(100 - v(t)\right).$$

Resolva o problema acoplado usando $q(0) = 0$.

Solução a) Aplicando transformada de Laplace no problema

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = -4v(t) + 180\delta(t-1) \\ v(0) = 18, \end{cases}$$

temos:

$$sV(s) - 18 = -4V(s) + 180e^{-s}$$

ou seja,

$$V(s) = \frac{180}{s+4}e^{-s} + \frac{18}{s+4}$$

Logo,

$$v(t) = 18e^{-4t} + 180u(t-1)e^{-4(t-1)}$$

Solução b) Aplicando transformada de Laplace no problema

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = -4v(t) + q(t) \\ \dfrac{dq(t)}{dt} = 4\left(100 - v(t)\right) \\ v(0) = 18 \\ q(0) = 0, \end{cases}$$

temos:

$$\begin{cases} sV(s) - 18 = -4V(s) + Q(s) \\ sQ(s) = -4V(s) + \dfrac{400}{s}, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} (s+4)V(s) - Q(s) = 18 \\ sQ(s) + 4V(s) = \dfrac{400}{s}. \end{cases}$$

Somamos a segunda equação com a primeira multiplicada por s e obtemos:

$$s(s+4)V(s) + 4V(s) = 18s + \frac{400}{s}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{18s}{s^2+4s+4} + \frac{400}{s(s^2+4s+4)} \\ &= \frac{18s^2+400}{s(s+2)^2} \end{aligned}$$

Também, como $sQ(s) + 4V(s) = \dfrac{400}{s}$, temos

$$\begin{aligned} Q(s) &= -4\frac{18s^2+400}{s^2(s+2)^2} + \frac{400(s+2)^2}{s^2(s+2)^2} \\ &= \frac{-72s^2-1600}{s^2(s+2)^2} + \frac{400s^2+1600s+1600}{s^2(s+2)^2} \\ &= \frac{328s^2+1600s}{s^2(s+2)^2} \\ &= \frac{328s+1600}{s(s+2)^2} \end{aligned}$$

Agora, usamos a técnicas de frações parciais:

$$V(s) = \frac{18s^2+400}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} = \frac{A(s+2)^2 + Bs(s+2) + sC}{s(s+2)^2}$$

e

$$Q(s) = \frac{328s+1600}{s(s+2)^2} = \frac{E}{s} + \frac{F}{s+2} + \frac{G}{(s+2)^2} = \frac{E(s+2)^2 + Fs(s+2) + sG}{s(s+2)^2}$$

Logo,

$$\begin{cases} A + B = 18 \\ 4A + 2B + C = 0 \\ 4A = 400 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} E + F = 0 \\ 4E + 2F + G = 328 \\ 4E = 1600 \end{cases}$$

e, assim, $A = 100$, $B = -82$, $C = -236$, $E = 400$, $F = -400$ e $G = -472$. Então,

$$V(s) = \frac{100}{s} - \frac{82}{s+2} - \frac{236}{(s+2)^2}$$

e

$$Q(s) = \frac{400}{s} - \frac{400}{s+2} - \frac{472}{(s+2)^2}.$$

Portanto,

$$v(t) = 100 - 82e^{-2t} - 236te^{-2t}$$

e

$$q(t) = 400 - 400e^{-2t} - 472te^{-2t}.$$