UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2016/1
Prova da área IA

1 - 6	**7**	**8**	**Total**

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\text{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\text{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\text{sen}(x+y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s),$ onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(s)ds$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\text{sen}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\text{senh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, \ldots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\text{Si}\,(t) = \int_0^t \dfrac{\text{sen}(x)}{x} dx$

Integrais:

$\int x e^{\lambda x}\, dx = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x}\, dx = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x}\, dx = \dfrac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x)\, dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\, \text{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\, \text{sen}(\lambda x)\, dx = \dfrac{\text{sen}(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \qquad (n = 1, 2, 3...)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
7 12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2 + w^2}$	$\frac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} e^{at}\operatorname{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1 - \cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt - \operatorname{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\operatorname{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\operatorname{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)},$ $(a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2 - a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\operatorname{sen}(at)\cosh(at) -$ $- \cos(at)\operatorname{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at))$
27	$\frac{1}{(s^4 - a^2)}$	$\frac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}(at) - \operatorname{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at}(1 + 2at)$
33	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s} e^{-\frac{k}{s}}, \qquad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \qquad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \qquad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\frac{s^2 + w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1 - \cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2 - a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1 - \cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\operatorname{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\operatorname{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t + 2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t + 2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2 + w^2)\left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2 + w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert\operatorname{sen}(wt)\rvert$
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s\,(1 - e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t) = \frac{t}{a}, \qquad 0 < t < a$ $f(t) = f(t - a), \quad t > a$

• **Questão 1** (1.0 ponto) A transformada inversa de Laplace da função $\dfrac{e^{-3s}}{(s^2-3s+2)}$ é

( ) $u(t-3)\left(e^{2t}-e^{t}\right)$

( ) $u(t-3)\left(2e^{\frac{3}{2}(t-3)}\,\text{senh}\left(\dfrac{t-3}{2}\right)\right)$

( ) $e^{2(t-3)}-e^{t-3}$

( ) $u(t-3)\left(2e^{\frac{3}{2}t}\,\text{senh}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)$

( ) $e^{-3t}\left(e^{2(t-3)}-e^{t-3}\right)$

( ) $e^{-3t}\left(2e^{\frac{3}{2}(t-3)}\,\text{senh}\left(\dfrac{t-3}{2}\right)\right)$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Sabendo que $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ e que os limites $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t}$ e $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t^2}$ existem, é correto afirmar que

( ) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t^2}\right\}=s^2\displaystyle\int_s^\infty F(u)du$

( ) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t^2}\right\}=s\displaystyle\int_s^\infty F(u)du$

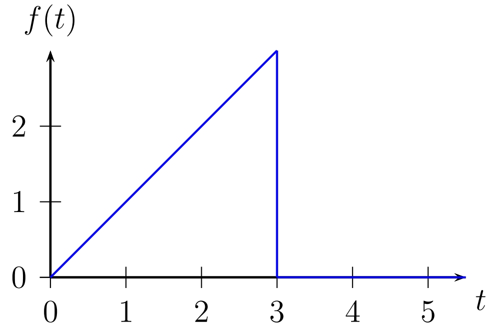
( ) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t^2}\right\}=s^2F(s)$

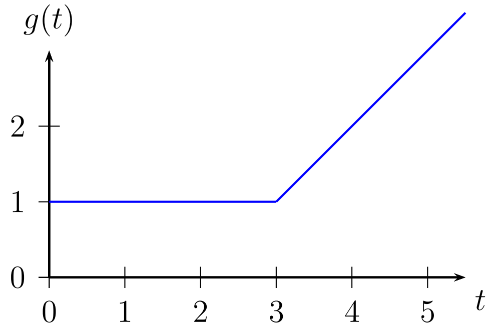
( ) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t^2}\right\}=\dfrac{1}{s^2}F(s)$

( ) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t^2}\right\}=\dfrac{1}{s}\displaystyle\int_s^\infty F(u)du$

( ) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t^2}\right\}=\displaystyle\int_s^\infty\int_v^\infty F(u)dudv$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere as funções f e g dadas nos gráficos abaixo:





É correto afirmar que

( ) $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = \dfrac{1-e^{-3s}}{s^2}$ e $\mathcal{L}\{u(t-4)f(t)g(t)\} = 0$

( ) $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = \dfrac{1-e^{-3s}}{s^2}$ e $\mathcal{L}\{u(t-4)f(t)g(t)\} = e^{-4s}$

( ) $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = \dfrac{1-e^{-3s}}{s^2}$ e $\mathcal{L}\{u(t-4)f(t)g(t)\} = 4e^{-4s}$

( ) $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = \dfrac{1-e^{-3s}-3se^{-3s}}{s^2}$ e $\mathcal{L}\{u(t-4)f(t)g(t)\} = 0$

( ) $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = \dfrac{1-e^{-3s}-3se^{-3s}}{s^2}$ e $\mathcal{L}\{u(t-4)f(t)g(t)\} = e^{-4s}$

( ) $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = \dfrac{1-e^{-3s}-3se^{-3s}}{s^2}$ e $\mathcal{L}\{u(t-4)f(t)g(t)\} = 4e^{-4s}$

• **Questão 4** (1.0 ponto) A transformada de Laplace da função $f(t) = \mathrm{sen}(t)\delta(t-1)$ é

( ) $\dfrac{1}{1-e^{-s}}$

( ) $\dfrac{\mathrm{sen}(1)}{1-e^{s}}$

( ) $\dfrac{e^{-s}}{s^2+1}$

( ) $\mathrm{sen}(1)e^{-s}$

( ) $\dfrac{\pi}{s^2+1}$

( ) 0

• **Questão 5** (1.0 ponto) Considere o circuito RLC regido pela equação

$$\begin{cases} y'' + Ry' + \dfrac{1}{C}y = \delta(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

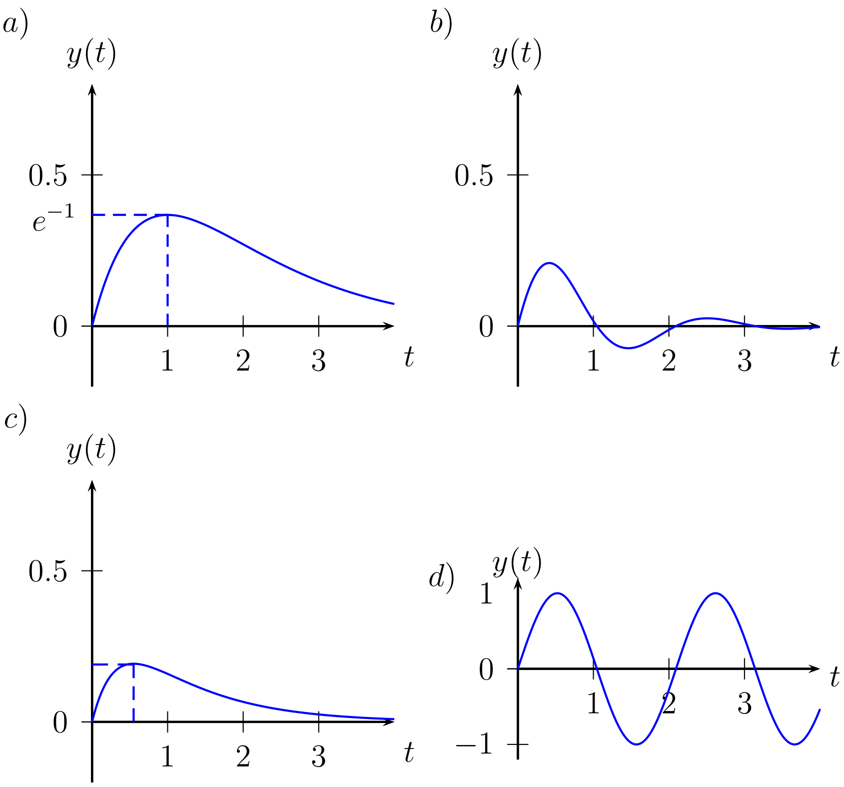
Também considere alguns valores para a capacitância C e a resistência R:

i) $R = 0$ e $C = \dfrac{1}{9}$

ii) $R = 2$ e $C = \dfrac{1}{10}$

iii) $R = 4$ e $C = \dfrac{1}{3}$

iv) $R = 2$ e $C = 1$



Relacione os itens i), ii), iii) e iv) aos itens a), b), c) e d) [*Cada item relacionado corretamente vale 0.25 pontos*].

• **Questão 6** (1.0 ponto) Marque a opção que apresenta a transformada inversa da função $F(s) = \dfrac{6}{(s^2-1)(s+2)}$

( ) $f(t) = -\dfrac{6}{5}\cos(t) + \dfrac{12}{5}\operatorname{sen}(t) + \dfrac{6}{5}e^{-2t}$

( ) $f(t) = -3e^{t} + 2e^{2t} + e^{-t}$

( ) $f(t) = -e^{t} - 2e^{-2t} + 3e^{-t}$

( ) $f(t) = -\dfrac{6}{5}\cosh(t) + \dfrac{12}{5}\operatorname{senh}(t) + \dfrac{6}{5}e^{-2t}$

( ) $f(t) = e^{t} + 2e^{-2t} - 3e^{-t}$

- **Questão 7** (2.0 pontos) Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1; \\ 1, & 1 < t < 2; \\ -1, & t > 2. \end{cases}$$

a) (0.5) Esboce o gráfico da função $f(t)$.

b) (0.5) Esboce o gráfico da função $g(t) = f'(t)$.

c) (1.0) Calcule a transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$

• **Questão 8** (2.0 pontos) Considere o seguinte problema de valor inicial para um sistema de equações integro-diferenciais:

$$x'(t) + x(t) = 2y(t)$$
$$x(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau + 1$$

com $x(0) = 0$.Usando a teoria das Transformadas de Laplace, resolve o sistema, obtendo $x(t)$ e $y(t)$.
Obs: Este sistema apresenta “problemas na origem”.