UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2016/1
Prova da área IA

1 - 6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $\quad (f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(s)ds$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, \ldots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$

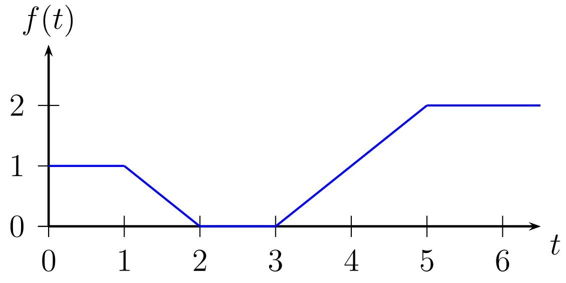
Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\dfrac{1}{s}$	1
2	$\dfrac{1}{s^2}$	t
3	$\dfrac{1}{s^n}, \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\dfrac{1}{\sqrt{s}},$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$
6	$\dfrac{1}{s^k}, \qquad (k > 0)$	$\dfrac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\dfrac{1}{(s-a)^n}, \qquad (n = 1, 2, 3...)$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\dfrac{1}{(s-a)^k}, \qquad (k > 0)$	$\dfrac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
7 12	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
13	$\dfrac{1}{s^2+w^2}$	$\dfrac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)$
14	$\dfrac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
16	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\dfrac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\dfrac{1}{w}e^{at}\operatorname{sen}(wt)$
18	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\dfrac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\dfrac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\dfrac{1}{w^3}(wt - \operatorname{sen}(wt))$
21	$\dfrac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\dfrac{1}{2w^3}(\operatorname{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
22	$\dfrac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\dfrac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt)$
23	$\dfrac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\dfrac{1}{2w}(\operatorname{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
24	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)},$ $(a^2 \neq b^2)$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\dfrac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\dfrac{1}{4a^3}[\operatorname{sen}(at)\cosh(at) -$ $- \cos(at)\operatorname{senh}(at)]$
26	$\dfrac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at))$
27	$\dfrac{1}{(s^4-a^2)}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}(at) - \operatorname{sen}(at))$
28	$\dfrac{s}{(s^4-a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
30	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\dfrac{a-b}{2}t\right)$
31	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\dfrac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
33	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^k}, \qquad (k > 0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\dfrac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \qquad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \qquad (k > 0)$	$\dfrac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\dfrac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \qquad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\dfrac{s-a}{s-b}\right)$	$\dfrac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\dfrac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\dfrac{2}{t}(1-\cos(wt))$
41	$\ln\left(\dfrac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\dfrac{2}{t}(1-\cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\dfrac{w}{s}\right)$	$\dfrac{1}{t}\operatorname{sen}(wt)$
43	$\dfrac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\operatorname{Si}(t)$
44	$\dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\dfrac{1}{as^2}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\dfrac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\dfrac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(wt), & 0 < t < \dfrac{\pi}{w} \\ 0, & \dfrac{\pi}{w} < t < \dfrac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \dfrac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\dfrac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\dfrac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert\operatorname{sen}(wt)\rvert$
48	$\dfrac{1}{as^2} - \dfrac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t) = \dfrac{t}{a}, \qquad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

- **Questão 1** (1.0 ponto) Considere a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada no gráfico abaixo:



A transformada de Laplace da função $f(t)$ é

( ) $\dfrac{1 - e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} - e^{-5s}}{s^2}$

( ) $\dfrac{1 - e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} - e^{-5s}}{s}$

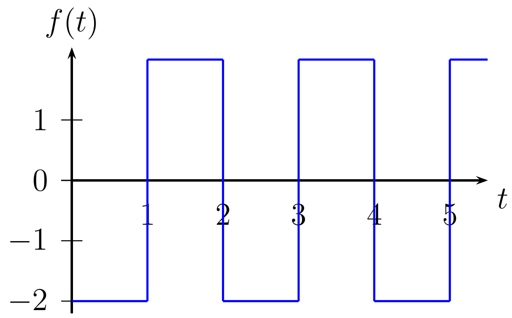
( ) $\dfrac{-e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} - e^{-5s}}{s^2}$

( ) $\dfrac{-e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} - e^{-5s}}{s}$

( ) $\dfrac{1 - e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} - e^{-5s}}{s^3}$

( ) $\dfrac{1 - e^{-s} - e^{-5s}}{s^2}$

- **Questão 2** (1.0 ponto) Considere a função periódica $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada no gráfico abaixo:



É correto afirmar que

( ) $2\dfrac{e^{-s}}{s}\tanh\left(\dfrac{s}{2}\right)$

( ) $2\left[\dfrac{1}{s} + \dfrac{e^{-s}}{s}\tanh\left(\dfrac{s}{2}\right)\right]$

( ) $2\left[\dfrac{e^{-s} - 1}{s} + \dfrac{e^{-s}}{s}\tanh\left(\dfrac{s}{2}\right)\right]$

( ) $2\left[\dfrac{1 - e^{-s}}{s^2} + \dfrac{e^{-s}}{s^2}\tanh\left(\dfrac{s}{2}\right)\right]$

( ) $2\dfrac{e^{-s}}{s^2}\tanh\left(\dfrac{s}{2}\right)$

( ) $2\tanh(s)$

• **Questão 3** (1.0 ponto) A transformada de Laplace da função $t^4\delta(t-2)$ é

( ) $8e^{-2s}$

( ) $16e^{-2s}$

( ) $32e^{-2s}$

( ) $\dfrac{24e^{-2s}}{s^5}$

( ) $\dfrac{24}{s^5}e^{-2s}$

( ) $\dfrac{24}{s^5}\dfrac{e^{-2s}}{s}$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere o circuito RLC regido pela equação

$$\begin{cases} y'' + Ry' + \dfrac{1}{C}y = \delta(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

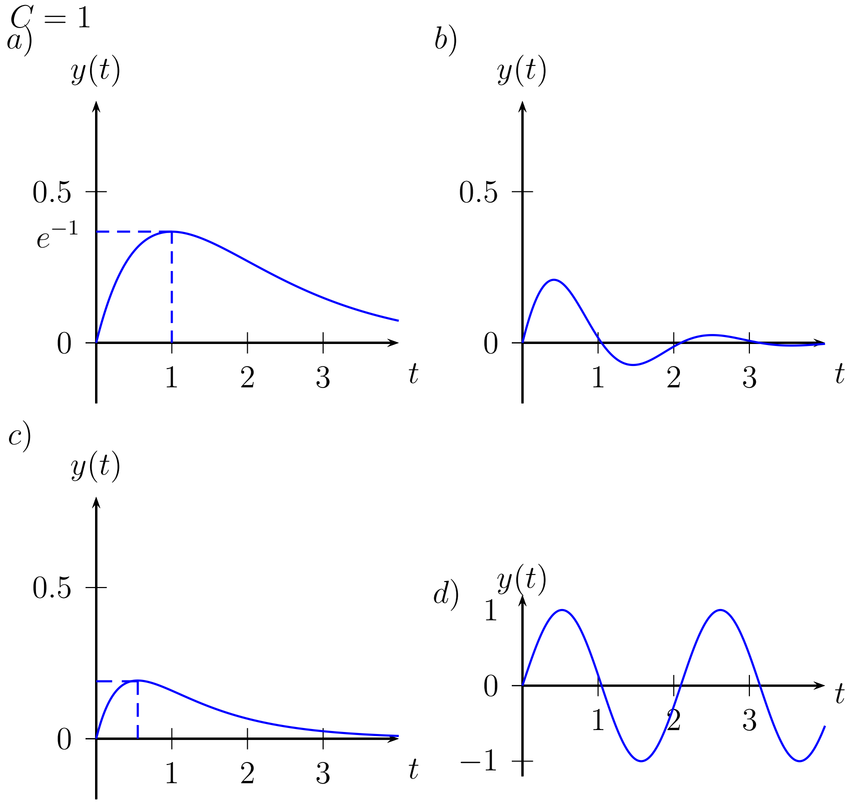
Também considere alguns valores para a capacitância C e a resistência R:

i) ( ) $R = 0$ e $C = \dfrac{1}{9}$

ii) ( ) $R = 2$ e $C = \dfrac{1}{10}$

iii) ( ) $R = 4$ e $C = \dfrac{1}{3}$

iv) ( ) $R = 2$ e $C = 1$



Relacione os itens i), ii), iii) e iv) aos itens a), b), c) e d) [*Cada item relacionado corretamente vale 0.25 pontos*].

• **Questão 5** (1.0 ponto) Dada a equação $y * y = te^{-t}$, onde $f * g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, assinale a alternativa que contém apenas soluções da equação.

( ) $y(t) = e^{-t}$ e $y(t) = -e^{-t}$

( ) $y(t) = J_0(t)$ e $y(t) = J_0(-t)$

( ) $y(t) = \text{sen}(t)$ e $y(t) = \cos(t)$

( ) $y(t) = \sqrt{t}e^{-t/2}$ e $y(t) = -\sqrt{t}e^{-t/2}$

( ) $y(t) = \text{senh}(t)$ e $y(t) = \text{senh}(t)$

• **Questão 6** (1.0 ponto) Considere o circuito RLC regido pela equação

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 6y = e^{-t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Marque a alternativa que contém $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$:

( ) $Y(s) = \dfrac{2+s}{s^2+3s+6}$

( ) $Y(s) = \dfrac{s^2+3s+3}{(s+1)(s^2+3s+6)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{s+2}{(s+1)(s^2+3s+6)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{s^2+3s+3}{(s^2+3s+6)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{(s+2)(s+1)}{s^2+3s+6}$

- **Questão 7** (2.0 pontos) Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 < t < 1; \\ 0, & 1 < t < 2; \\ t-2, & 2 < t < 3; \\ 4-t, & 3 < t < 4; \\ 0, & t > 4. \end{cases}$$

a) (0.5) Esboce o gráfico da função $f(t)$.

b) (0.5) Esboce o gráfico da função $g(t) = f'(t)$.

c) (1.0) Calcule a transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$

• **Questão 8** (2.0 pontos) Um determinado reator promove a oxidação biológica da amônia em nitrito. Considere que a reação pode ser modelada pelo seguinte modelo simplificado:

$$x'(t) = \kappa x(t) + q(t),$$

onde $x(t)$ é a quantidade de amônia no reator, $q(t)$ representa adição dessa substância e κ é uma constante positiva. Suponha que a entrada de amônia acontece periodicamente, isto é

$$q(t) = q_0 \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT).$$

Sabendo que $x(0) = 0$. Usando a teoria das Transformadas de Laplace, encontre uma expressão para $x(t)$.