UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2016/2
Prova da área IA

1 - 5	6	7	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\text{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\text{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\text{sen}(x+y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})\hat{s}$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\text{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, \ldots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\text{Si}\,(t) = \int_0^t \dfrac{\text{sen}(x)}{x}dx$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\,\text{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\,\text{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\text{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n=1,2,3,...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k>0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n=1,2,3...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k>0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a\neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a\neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at}-be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2+w^2}$	$\frac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\operatorname{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt-\operatorname{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\operatorname{sen}(wt)-wt\cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\operatorname{sen}(wt)+wt\cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}, \quad (a^2\neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos(at)-\cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\operatorname{sen}(at)\cosh(at)- -\cos(at)\operatorname{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at))$
27	$\frac{1}{(s^4-a^2)}$	$\frac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}(at)-\operatorname{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at)-\cos(at))$
29	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}}I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
33	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k}, \quad (k>0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k>0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k>0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t)-\gamma, \quad (\gamma\approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt}-e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}\left(1-\cos(wt)\right)$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}\left(1-\cosh(at)\right)$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\operatorname{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\operatorname{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a\\ -1, & a<t<2a\end{cases}$ $f(t+2a)=f(t), \quad t>0$
45	$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t)=\begin{cases}\frac{t}{a}, & 0<t<a\\ -\frac{t}{a}+2, & a<t<2a\end{cases}$ $f(t+2a)=f(t), \quad t>0$
46	$\frac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen}(wt), & 0<t<\frac{\pi}{w}\\ 0, & \frac{\pi}{w}<t<\frac{2\pi}{w}\end{cases}$ $f\left(t+\frac{2\pi}{w}\right)=f(t), \quad t>0$
47	$\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t)=\lvert\operatorname{sen}(wt)\rvert$
48	$\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s\left(1-e^{-as}\right)}$	Onda dente de serra $f(t)=\frac{t}{a}, \quad 0<t<a$ $f(t)=f(t-a), \quad t>a$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $\mathcal{L}\left\{\ln(t)\right\}$ e $\mathcal{L}\left\{\ln(t)e^{-t}\right\}$

( ) $\gamma - \dfrac{\ln(s)}{s}$,

( ) $-\gamma - \dfrac{\ln(s)}{s}$,

(X) $\dfrac{-\gamma - \ln(s)}{s}$,

( ) $\dfrac{\gamma - \ln(s)}{s}$,

( ) n.d.a.

( ) $-\gamma - \dfrac{\ln(s-1)}{s-1}$,

( ) $\gamma - \dfrac{\ln(s+1)}{s+1}$,

( ) $\dfrac{\gamma - \ln(s-1)}{s-1}$,

(X) $\dfrac{-\gamma - \ln(s+1)}{s+1}$,

( ) n.d.a.

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere a função $f(t)$ definida como

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2, \\ 4 - t, & t > 2. \end{cases}$$

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, uma representação para $f(t)$ e $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$:

(X) $f(t) = tu(t) + (4 - 2t)u(t - 2)$

( ) $f(t) = tu(t) + (4 - t)u(t - 2)$

( ) $f(t) = t\left[u(t) - u(t - 1)\right] + (4 - 2t)u(t - 2)$

( ) $f(t) = tu(t) + (4 - 2t)u(t - 4)$

( ) n.d.a.

( ) $\dfrac{1}{s^3} - \dfrac{2}{s^3}e^{-2s}$

( ) $\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{4}{s}e^{-2s} - \dfrac{2}{s^2}e^{-2s}$

( ) $\dfrac{1}{s^3} + \dfrac{4}{s^2}e^{-2s} - \dfrac{4}{s^3}e^{-2s}$

(X) $\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{2}{s^2}e^{-2s}$

( ) n.d.a.

• **Questão 3** (1.0) Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $\mathcal{L}\{J_0(at) * J_0(at)\}$ e $\mathcal{L}\{tJ_0(at)\}$

(X) $\dfrac{1}{s^2 + a^2}$,

( ) $\dfrac{s}{s^2 + a^2}$,

( ) $\dfrac{a}{s^2 + a^2}$,

( ) $\dfrac{1}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$,

( ) $\dfrac{s}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$,

( ) $\dfrac{a}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$,

( ) n.d.a.

(X) $\dfrac{s}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$

( ) $-\dfrac{s}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{a}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$

( ) $-\dfrac{a}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{as}{(s^2 + a^2)}$

( ) $-\dfrac{a}{(s^2 + a^2)}$

( ) n.d.a.

• **Questão 4** (1.0) Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + \alpha y(t) \\ y'(t) &= x(t) - 2y(t) \end{aligned}$$

Com $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$ e onde α é uma constante real.

a) (0.5) Assinale a alternativa que indica uma expressão para $X(s)$, isto é, $\mathcal{L}\{x(t)\}$:

( ) $X(s) = \dfrac{1}{s^2 + 3s + 2 - \alpha}$

( ) $X(s) = \dfrac{1}{s^2 + 3s + 2 + \alpha}$

(X) $X(s) = \dfrac{\alpha}{s^2 + 3s + 2 - \alpha}$

( ) $X(s) = \dfrac{\alpha}{s^2 + 3s + 2 + \alpha}$

( ) $X(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 3 - \alpha}$

( ) $X(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 3 + \alpha}$

( ) $X(s) = \dfrac{\alpha}{s^2 + 2s + 3 - \alpha}$

( ) $X(s) = \dfrac{\alpha}{s^2 + 2s + 3 + \alpha}$

( ) n.d.a.

b) (0.5) Assinale a alternativa que indica o tipo de amortecimento do sistema dado para os valores de α dados respectivamente por -2, -1, 0 e 1:

( ) Sem amortecimento, subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido.

( ) Subamortecido, subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido.

( ) Subamortecido, criticamente amortecido, superamortecido e superamortecido.

( ) Superamortecido, superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido.

( ) Superamortecido, criticamente amortecido, subamortecido e subamortecido.

(X) Subamortecido, subamortecido, superamortecido e superamortecido.

( ) n.d.a.

• **Questão 5** (1.0) Considere o seguinte problema de **valor de contorno**:

$$\begin{aligned} u''(x) - \alpha^2 u(x) &= 0 \\ u'(0) &= 0 \\ u(1) &= 10, \end{aligned}$$

onde α é uma constante positiva.

a) Assinale a alternativa que indica uma expressão para $u(x)$.

(X) $C\,\dfrac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}$,

( ) $C\,\dfrac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$,

( ) $C\,e^{\alpha^2 x}$,

( ) $C\,e^{-\alpha^2 x}$,

( ) C sen(αx),

( ) $C\cos(\alpha x)$.

Onde C é uma constante que depende de $u(1)$.

b) Assinale a alternativa que indica o valor da constante C (a mesma do item anterior) quando $\alpha = \ln(2)$.

( ) 1,

( ) 3,

( ) 5,

( ) 6,

(X) 8,

( ) 12,

( ) n.d.a.

• **Questão 6** (2.5) Considere a seguinte equação integral:

$$y(t) = x(t) + \int_0^t y(\tau)\,\mathrm{sen}(t-\tau)d\tau$$

onde $x(t)$ é um termo forçante conhecido.

a) (1.0 ponto) Calcule a transformada de Laplace da equação integral e escreva $Y(s) = H(s)X(s)$, onde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ e $H(s)$ é uma função a ser determinada.

b) (1.0 ponto) Supondo $x(t) = t\,\mathrm{sen}(t)$, encontre $y(t)$.

c) (0.5 ponto) Esboce o gráfico da solução $y(t)$ encontrada no item b) indicando eixos e valores notáveis.

Solução: a) Aplicamos a transformada de Laplace na equação integral para obter

$$Y(s) = X(s) + Y(s)\frac{1}{s^2+1},$$

onde usamos a propriedade da convolução na última parcela. Assim,

$$Y(s)\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = X(s).$$

Logo,

$$Y(s) = \frac{(s^2+1)X(s)}{s^2}.$$

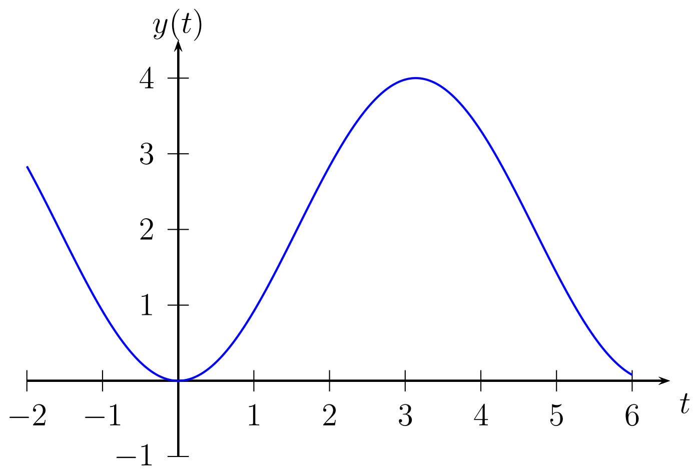
Solução: b) Pelo item 22 da tabela, $X(s) = \mathcal{L}\{t\,\mathrm{sen}(t)\} = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$. Assim,

$$Y(s) = \frac{(s^2+1)}{s^2}\frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{2}{s(s^2+1)}.$$

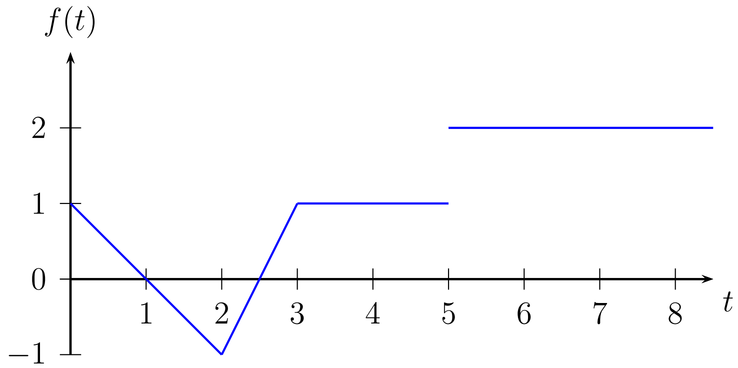
Usamos o item 19 da tabela para concluir que

$$y(t) = 2 - 2\cos(t).$$

Solução: c)



• **Questão 7** (2.5) Considere a função $f(t)$ cujo gráfico é dado abaixo.

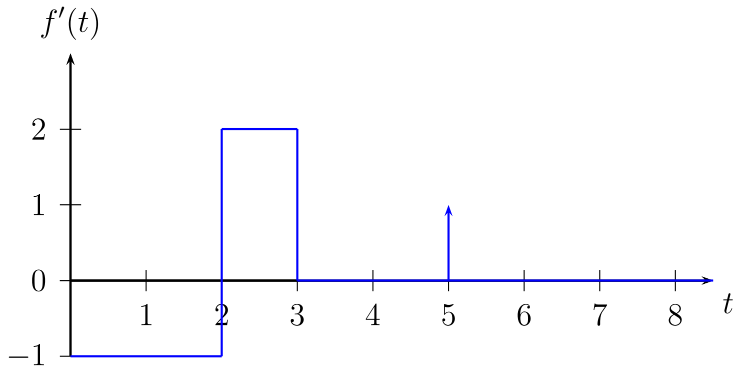


a) (0.5 ponto) Esboce o gráfico de $f'(t)$ indicando eixos e valores notáveis.

a) (1.0 ponto) Escreva $f(t)$ e $f'(t)$ usando a função de Heaviside e Delta de Dirac.

b) (1.0 ponto) Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e $\mathcal{L}\{f'(t)\}$.

Solução: a)



Solução: b)

$$\begin{aligned} f(t) &= (1-t)u(t) + (3t-6)u(t-2) + (6-2t)u(t-3) + u(t-5) \\ &= u(t) - tu(t) + 3(t-2)u(t-2) - 2(t-3)u(t-3) + u(t-5) \end{aligned}$$

$$f'(t) = -u(t) + 3u(t-2) - 2u(t-3) + \delta(t-5)$$

Solução: c) Usando a propriedade do deslocamento do eixo t, temos:

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{3e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-3s}}{s^2} + \frac{e^{-5s}}{s}$$

e

$$\mathcal{L}\{f'\} = -\frac{1}{s} + \frac{3e^{-2s}}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s} + e^{-5s}.$$