UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2017/2
Prova da área IIA

1 - 5	6	7	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** __________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s),$ onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})\hat{s}$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, \ldots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,dx = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,dx = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,dx = \dfrac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}dx + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n},\quad (n=1,2,3,...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k},\quad (k>0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n},\quad (n=1,2,3...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k},\quad (k>0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)},\quad (a\neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)},\quad (a\neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at}-be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2+w^2}$	$\frac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\operatorname{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt-\operatorname{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\operatorname{sen}(wt)-wt\cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\operatorname{sen}(wt)+wt\cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)},\quad (a^2\neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos(at)-\cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\operatorname{sen}(at)\cosh(at)-$ $-\cos(at)\operatorname{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at))$
27	$\frac{1}{(s^4-a^2)}$	$\frac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}(at)-\operatorname{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at)-\cos(at))$

	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
29	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}}I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
33	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k},\quad (k>0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}},\quad (k>0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}},\quad (k>0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t)-\gamma,\quad (\gamma\approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt}-e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\operatorname{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\operatorname{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a\\ -1, & a<t<2a\end{cases}$ $f(t+2a)=f(t),\quad t>0$
45	$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t)=\begin{cases}\frac{t}{a}, & 0<t<a\\ -\frac{t}{a}+2, & a<t<2a\end{cases}$ $f(t+2a)=f(t),\quad t>0$
46	$\frac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen}(wt), & 0<t<\frac{\pi}{w}\\ 0, & \frac{\pi}{w}<t<\frac{2\pi}{w}\end{cases}$ $f\left(t+\frac{2\pi}{w}\right)=f(t),\quad t>0$
47	$\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t)=\lvert\operatorname{sen}(wt)\rvert$
48	$\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t)=\frac{t}{a},\quad 0<t<a$ $f(t)=f(t-a),\quad t>a$

• **Questão 1** (1.0) Considere um oscilador harmônico modelado pelo problema de segunda ordem abaixo.

$$\begin{aligned} my''(t) + \gamma y'(t) + ky(t) &= 0 \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_0' \end{aligned}$$

onde $m = 2\,\text{Kg}$, $k = 5\,\text{N/m}$, $y_0 = 1\,\text{m}$, $y_0' = 0\,\text{m/s}$ e γ é uma constante não negativa. Marque, na primeira coluna, o item que **NÃO** pode representar a solução desse sistema e, na segunda, o item que apresenta a faixa onde γ pode assumir valores para que o sistema fique **subamortecido**.

( ) exponenciais multiplicadas por cossenos e senos trigonométricos

( ) exponenciais

( ) cossenos e senos trigonométricos.

( ) cossenos e senos hiperbólicos.

( ) exponenciais multiplicadas por polinômios de grau no máximo 1.

(X) polinômios

( ) $0 \le \gamma \le 2\sqrt{10}$

(X) $0 < \gamma < 2\sqrt{10}$,

( ) $\gamma > 2\sqrt{10}$

( ) $\gamma \ge 2\sqrt{10}$

( ) $\gamma = 0$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Seja $f(t) = t^2\delta(t-1)$ e $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$. Assinale as alternativas que indicam respectivamente $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e $\mathcal{L}\{g(t)\}$:

( ) $\dfrac{2e^{-s}}{s^3}$

( ) $\dfrac{e^{-s}}{s^2}$

( ) $\dfrac{1}{s^3}$

(X) e^{-s}

( ) $\dfrac{1}{s^2}$

( ) $\dfrac{2e^{-s}}{s^4}$

( ) $\dfrac{e^{-s}}{s^3}$

(X) $\dfrac{e^{-s}}{s}$

( ) $\dfrac{1}{s^4}$

( ) $\dfrac{1}{s^3}$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere a função definida como:

$$f(t) = \begin{cases} 1+t, & 0 \le t < 1 \\ (3-t), & 1 \le t < 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$$

Marque as alternativas que correspondem respectivamente a $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ e $\mathcal{L}\{f(t)\}$:

(X) $\dfrac{1-2e^{-s}+e^{-3s}}{s}$

( ) $\dfrac{1-2e^{-s}+e^{-3s}}{s^2}$

( ) $\dfrac{1-2e^{-s}+e^{-3s}}{s^3}$

( ) $\dfrac{1+2e^{-s}+e^{-3s}}{s}$

( ) $\dfrac{1-e^{-s}+e^{-3s}}{s}$

( ) $\dfrac{1-2e^{-s}+e^{-3s}+s}{s^3}$

( ) $\dfrac{1-2e^{-s}+e^{-3s}+s^2}{s^2}$

( ) $\dfrac{1-2e^{-s}+e^{-3s}}{s^2}$

(X) $\dfrac{1-2e^{-s}+e^{-3s}+s}{s^2}$

( ) $\dfrac{1+2e^{-s}+e^{-3s}}{s^2}$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere o problema de valor inicial dado por:

$$\begin{aligned} x'(t) + 3x(t) &= 3u(t) \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

Marque as alternativas que correspondem respectivamente a $\mathcal{L}\{x(t)\}$ e $x(t)$:

( ) $\dfrac{1}{s+3} - \dfrac{1}{s}$

( ) $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+3}$

( ) $\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s-3}$

( ) $\dfrac{1}{s-3} - \dfrac{1}{s}$

( ) $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s-3}$

(X) $\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+3}$

( ) $1 - e^{3t}$

( ) $1 + e^{-3t}$

(X) $1 - e^{-3t}$

( ) $-1 + e^{-3t}$

( ) $1 + e^{3t}$

( ) $-1 - e^{-3t}$

• **Questão 5** (1.0 ponto) Marque as alternativas que correspondem respectivamente a $\mathcal{L}\{t\cos(t)\}$ e $\mathcal{L}\{e^{-t}\cos(t)\}$:

( ) $\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$

(X) $\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

( ) $\dfrac{s^2+1}{(s^2+1)^2}$

( ) $\dfrac{1}{s^2\left[(s^2+1)^2\right]}$

( ) $\dfrac{s^2+1}{s^2\left[(s^2+1)^2\right]}$

( ) $\dfrac{s^2-1}{s^2\left[(s^2+1)^2\right]}$

( ) $\dfrac{s-1}{(s+1)^2+1}$

( ) $\dfrac{s}{(s+1)^2+1}$

( ) $\dfrac{s+1}{(s-1)^2+1}$

( ) $\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}$

(X) $\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}$

( ) $\dfrac{s}{(s-1)^2+1}$

• **Questão 6** (2.5 ponto) A temperatura em um forno industrial evolui no tempo conforme o seguinte modelo simplificado:

$$\begin{cases} u'(t) = -2(u(t) - T_a) + q(t) \\ q'(t) = (T_f - u(t)) \\ u(0) = 15 \\ q(0) = 5 \end{cases}$$

onde $u(t)$ representa a temperatura medida no forno, $T_a = 25^0$C é temperatura ambiente, $T_f = 50^0$C é temperatura de controle, $q(t)$ é a potência de aquecimento. Use as técnicas das transformadas de Laplace para resolver o problema acima.

a) (1.25) Calcule as transformadas de Laplace $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ e $Q(s) = \mathcal{L}\{q(t)\}$ e preencha os retângulos abaixo:

U(s) =	Q(s) =

b) (1.25) Calcule $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$ e $q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}$ e preencha os retângulos abaixo:

u(t) =	q(t) =

Resposta Tomando transformada de Laplace, temos:

$$\begin{aligned} sU(s) - u(0) &= -2\left(U(s) - \frac{T_a}{s}\right) + Q(s) \\ sQ(s) - q(0) &= \frac{T_f}{s} - U(s) \end{aligned}$$

Substituindo as constantes, obtemos:

$$\begin{aligned} sU(s) - 15 &= -2\left(U(s) - \frac{25}{s}\right) + Q(s) \\ sQ(s) - 5 &= \frac{50}{s} - U(s) \end{aligned}$$

Reagrupando os termos:

$$\begin{aligned} U(s)\,(s+2) &= \frac{50}{s} + Q(s) + 15 \\ sQ(s) &= \frac{50}{s} - U(s) + 5 \end{aligned}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, encontramos:

$$U(s)\,(s+2) = \frac{50}{s} + \frac{1}{s}\left[\frac{50}{s} - U(s) + 5\right] + 15$$

equivalente a

$$U(s)\left(s + 2 + \frac{1}{s}\right) = \frac{55}{s} + \frac{50}{s^2} + 15$$

multiplicando ambos os lados por s:

$$U(s)\left(s^2 + 2s + 1\right) = 55 + \frac{50}{s} + 15s$$

$$
\begin{aligned}
U(s) &= \frac{55}{s^2+2s+1} + \frac{50}{s(s^2+2s+1)} + \frac{15s}{s^2+2s+1} \\
&= \frac{55}{(s+1)^2} + \frac{50}{s(s+1)^2} + \frac{15s}{(s+1)^2} \\
&= \frac{50}{s} - \frac{35}{s+1} - \frac{10}{(s+1)^2}
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
Q(s) &= \frac{1}{s}\left[\frac{50}{s} - U(s) + 5\right] \\
&= \frac{50}{s} - \frac{45}{s+1} - \frac{10}{(s+1)^2}
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
u(t) &= 50 - 5e^{-t}\,(2t+7) \\
q(t) &= 50 - 5e^{-t}\,(2t+9)
\end{aligned}
$$

• **Questão 7** (2.5 ponto) Resolva a seguinte equação difero-integral:

$$y'(t) + 3y(t) + 2\int_0^t y(\tau)d\tau = \cos(t)$$

Com $y(0) = 0$.

$$SY(s) - 0 + 3Y(s) + 2\frac{Y(s)}{s} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s)(s + 3 + \frac{2}{s}) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = \frac{s^2}{s^2+1}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^2}{(s^2+1)(s^2+3s+2)} = \frac{s^2}{(s^2+1)(s+1)(s+2))} \\ &= -\frac{4}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{10}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{10}\frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

assim:

$$y(t) = -\frac{4}{5}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{10}\cos(t) - \frac{1}{10}\operatorname{sen}(t)$$