UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2018/1
Prova da área IIA

1 - 6	7	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\text{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\text{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\text{sen}(x+y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s),$ onde $\quad (f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})\hat{s}$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\text{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, ...$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\text{Si}\,(t) = \int_0^t \dfrac{\text{sen}(x)}{x}dx$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\,\text{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\,\text{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\text{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n = 1, 2, 3...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2 + w^2}$	$\frac{1}{w}\,\text{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a}\,\text{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2 + w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\,\text{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1 - \cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt - \text{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\text{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{t}{2w}\,\text{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\text{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}, \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2 - a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\text{sen}(at)\cosh(at) - \cos(at)\,\text{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\,\text{sen}(at)\,\text{senh}(at))$
27	$\frac{1}{(s^4 - a^2)}$	$\frac{1}{2a^3}(\text{senh}(at) - \text{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1 + 2at)$
33	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\text{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \quad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\frac{s^2 + w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1 - \cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2 - a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1 - \cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\,\text{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\text{Si}\,(t)$
44	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t + 2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t + 2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2 + w^2)\left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \text{sen}(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2 + w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert\text{sen}(wt)\rvert$
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t) = \frac{t}{a}, \quad 0 < t < a$ $f(t) = f(t - a), \quad t > a$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere os três gráficos de três funções e suas três transformadas de Laplace

Gráfico 1

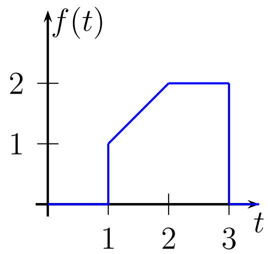


Gráfico 2

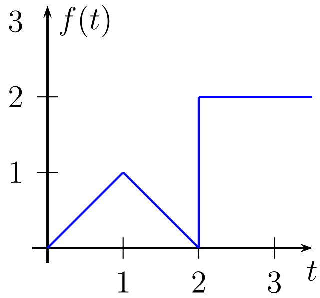
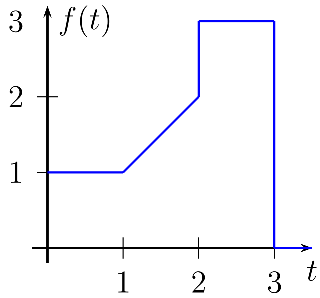


Gráfico 3



Função I: $f(t) = u(t) + (t-1)u(t-1) + (3-t)u(t-2) - 3u(t-3)$
Função II: $f(t) = tu(t) + 2(1-t)u(t-1) + tu(t-2)$
Função III: $f(t) = tu(t-1) + (2-t)u(t-2) - 2u(t-3)$

Transformada A: $F(s) = \dfrac{s + e^{-s} - e^{-2s} + se^{-2s} - 3e^{-3s}}{s^2}$
Transformada B: $F(s) = \dfrac{e^{-s} + se^{-s} - e^{-2s} - 2se^{-3s}}{s^2}$
Transformada C: $F(s) = \dfrac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s} + 2se^{-2s}}{s^2}$

Assinale as alternativas que indicam respectivamente a correta relação entre os gráficos e as funções:

( ) 1-I, 2-II, 3-III
( ) 1-I, 2-III, 3-II
( ) 1-II, 2-I, 3-III
( ) 1-II, 2-III, 3-I
( ) 1-III, 2-I, 3-II
(X) 1-III, 2-II, 3-I

( ) 1-A, 2-B, 3-C
( ) 1-A, 2-C, 3-B
( ) 1-B, 2-A, 3-C
(X) 1-B, 2-C, 3-A
( ) 1-C, 2-A, 3-B
( ) 1-C, 2-B, 3-A

• **Questão 2** (1.0 ponto) Dado que $y(t)$ satisfaz a equação diferencial dada por:

$$y'(t) + y(t) = 2\delta(t-2), \quad \forall t \geq 0, \qquad y(0) = 1$$

Assinale as alternativas que indicam respectivamente $y(t)$ e $y(1)$:

( ) $y(t) = e^{t} + 2u(t-2)e^{2-t}$
( ) $y(t) = e^{-t} + 2u(t-2)e^{t-2}$
(X) $y(t) = e^{-t} + 2u(t-2)e^{2-t}$
( ) $y(t) = e^{t} + 2u(t-2)e^{t-2}$
( ) $y(t) = e^{t} - 2u(t-2)e^{2-t}$
( ) $y(t) = e^{t} - 2u(t-2)e^{t-2}$

( ) $y(2) = e^{-1} - 2e^{-1}$
( ) $y(2) = 2e^{1}$
( ) $y(2) = e^{-1} + 2e^{-1}$
(X) $y(2) = e^{-1}$
( ) $y(2) = 2e^{-1} + e^{1}$
( ) $y(2) = 2e^{-1} - e^{1}$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Dado o sistema massa-mola-amortecedor modelado pela equação a seguir:

$$mx''(t) + \gamma x'(t) + \kappa x(t) = 0$$

onde $x(t)$ representa a posição e m, γ e κ são constantes positivas. A tranformada de Laplace de $x(t)$ é dada por $X(s) = \dfrac{2s}{s^2 + 2s - 3}$.

Assinale as alternativas que indicam respectivamente o regime de amortecimento e a as condições iniciais:

( ) Subamortecido

( ) Criticamente amortecido

(X) Superamortecido

( ) Não amortecido

( ) Não é possível determinar com os dados oferecidos.

( ) $x(0) = 0$ e $x'(0) = 4$

( ) $x(0) = 0$ e $x'(0) = -4$

( ) $x(0) = 2$ e $x'(0) = 0$

( ) $x(0) = -2$ e $x'(0) = 0$

(X) $x(0) = 2$ e $x'(0) = -4$

( ) $x(0) = -2$ e $x'(0) = -4$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Seja $f(t) = (t+1)u(t-1)$ e $g(t) = (u(t-1) + u(t-3))^2$. Assinale as alternativas que indicam respectivamente $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e $\mathcal{L}\{g(t)\}$:

( ) $\dfrac{(2-s)e^{-s}}{s^2}$

( ) $\dfrac{(2s-1)e^{-s}}{s}$

(X) $\dfrac{(2s+1)e^{-s}}{s^2}$

( ) $\left(\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s}\right)\dfrac{e^{-s}}{s}$

( ) $\dfrac{(2s^2+1)e^{-s}}{s^2}$

( ) $\dfrac{2e^{-s} + 2e^{-3s}}{s}$

( ) $\dfrac{3e^{-s} + e^{-3s}}{s^2}$

( ) $\dfrac{e^{-s} + 4e^{-3s}}{s}$

( ) $\dfrac{e^{-s} + e^{-3s}}{s}$

(X) $\dfrac{e^{-s} + 3e^{-3s}}{s}$

• **Questão 5** (1.0 ponto) Seja $F(s) = \dfrac{1}{(s-3)(s-2)}$ e $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. Assinale as alternativas que indicam respectivamente $f(t)$ e $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\}$:

( ) $e^{-3t} - e^{-2t}$

(X) $e^{3t} - e^{2t}$

( ) $-e^{-3t} + e^{-2t}$

( ) $3e^{3t} - 2e^{2t}$

( ) $-e^{3t} + e^{2t}$

( ) $\ln\left(\dfrac{s-3}{s-2}\right)$

( ) $\dfrac{s-2}{s-3}$

( ) $e^{-3s} - e^{-2s}$

(X) $\ln\left(\dfrac{s-2}{s-3}\right)$

( ) $\dfrac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}$

• **Questão 6** (1.0 ponto) Dado que $y(t)$ satisfaz a equação difero-integral dada por:

$$y'(t) + 4\int_0^t y(\tau)d\tau = 4, \quad \forall t \geq 0, \qquad y(0) = 0$$

Assinale as alternativas que indicam respectivamente $Y(s)$ e $y(t)$:

(X) $Y(s) = \dfrac{4}{s^2+4}$

( ) $Y(s) = \dfrac{4s}{s^2+4}$

( ) $Y(s) = \dfrac{4}{s+4}$

( ) $Y(s) = \dfrac{4s}{s+4}$

( ) $Y(s) = \dfrac{4}{s^2-4}$

( ) $Y(s) = \dfrac{4s}{s^2-4}$

( ) $y(t) = 2\cos(2t)$

( ) $y(t) = 4\cos(2t)$

( ) $y(t) = 2\,\mathrm{sen}(4t)$

( ) $y(t) = 2\cos(4t)$

(X) $y(t) = 2\,\mathrm{sen}(2t)$

( ) $y(t) = 4\,\mathrm{sen}(2t)$

• **Questão 7** (4.0 pontos) A temperatura em um forno industrial evolui no tempo conforme o seguinte modelo simplificado:

$$\frac{du(t)}{dt} = -\lambda(u(t) - u_{amb}) + q(t) \tag{1}$$

onde $u(t)$ representa a temperatura medida no forno, u_{amb} é temperatura ambiente, considerada constante, $q(t)$ é a potência de aquecimento e λ é uma constante relacionada às trocas de calor. Considere $u(0) = 20$, $u_{amb} = 20$ e $\lambda = 2$. Usando a técnicas das transformadas de Laplace, faça o que se pede:

a) (1.0) Calcule a temperatura $u(t)$ quando $q(t) = 100\delta(t)$. Esboce o gráfico de $u(t)$.

b) (1.0) Suponha, agora, que a temperatura é regulada por um sistema de controle automático que aumenta a potência $q(t)$ sempre que a temperatura está abaixo da temperatura de ajuste e reduz a potência sempre que a temperatura se encontra acima da temperatura de ajuste. O sistema de controle automático reage conforme a seguinte equação:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \eta(u_a - u(t)). \tag{2}$$

onde u_a é a temperatura de ajuste e η é uma constante positiva. Calcule o valor de η para que o sistema resultante do acoplamente entre o modelo do forno e o sistema de controle automático seja criticamente amortecido.

c) (1.0) Resolva o problema acoplado usando a constante η calculada no item b), considerando $u_a = 100$ e $q(0) = 200$.

d) (1.0) Esboce o gráfico de $u(t)$ no item c).

Resposta do item a

A transformada de Laplace da equação é dada por

$$sU(s) - u(0) = -\lambda\left(U(s) - \frac{u_{amb}}{s}\right) + Q(s)$$

Subsituindo os valores $u(0) = 20$, $u_{amb} = 20$ e $\lambda = 2$, temos:

$$sU(s) - 20 = -2\left(U(s) - \frac{20}{s}\right) + Q(s) \tag{3}$$

isto é:

$$(s+2)\,U(s) = 20 + \frac{40}{s} + Q(s)$$

e, portanto:

$$U(s) = \frac{20}{s+2} + \frac{40}{s(s+2)} + \frac{Q(s)}{s+2}$$

Substituindo $Q(s) = \{q(t)\} = \mathcal{L}\{100\delta(t)\} = 100$, temos:

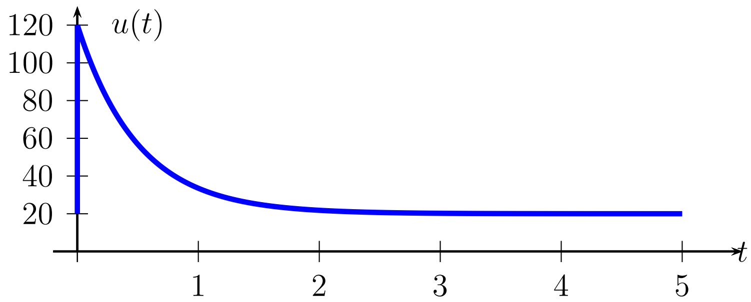
$$U(s) = \frac{120}{s+2} + \frac{40}{s(s+2)}$$

E finalmente $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$ é dado por:

$$u(t) = 120e^{-2t} + 20\left(1 - e^{-2t}\right) = 20 + 100e^{-2t}$$

onde se usou o item 7 na tabela com $a = -2$ e o item 11 com $a = 0$ e $b = -2$.

Gráfico do item a



Resposta do item b Agora, tomanto a transformada de Laplace da equação do item b, temos:

$$sQ(s) - q(0) = \eta\left(\frac{u_a}{s} - U(s)\right)$$

isto é:

$$Q(s) = \frac{q(0)}{s} + \eta\frac{u_a}{s^2} - \eta\frac{U(s)}{s} \tag{4}$$

Substituindo na equação 3, temos:

$$sU(s) - 20 = -2\left(U(s) - \frac{20}{s}\right) + \frac{q(0)}{s} + \eta\frac{u_a}{s^2} - \eta\frac{U(s)}{s}$$

Organizando os termos, temos:

$$\left(s + 2 + \frac{\eta}{s}\right)U(s) = 20 + \frac{40}{s} + \frac{q(0)}{s} + \eta\frac{u_a}{s^2}$$

multiplicando esta equação por s, obtemos:

$$\left(s^2 + 2s + \eta\right)U(s) = 20s + 40 + q(0) + \eta\frac{u_a}{s} \tag{5}$$

A criticalidade acontece quando o discriminando é nulo, isto é:

$$\Delta := 2^2 - 4\eta = 0 \Longrightarrow \eta = 1$$

Resposta do item c Partimos da equação 5:

$$\left(s^2 + 2s + \eta\right)U(s) = 20s + 40 + q(0) + \eta\frac{u_a}{s}$$

e substituímos os valores $\eta = 1$, $u_a = 100$ e $q(0) = 200$:

$$\left(s^2 + 2s + 1\right)U(s) = 20s + 240 + \frac{100}{s}$$

Como $(s^2 + 2s + 1) = (s + 1)^2$:

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{20s}{(s+1)^2} + \frac{240}{(s+1)^2} + \frac{100}{s(s+1)^2} \\ &= \frac{20(s+1)}{(s+1)^2} + \frac{240-20}{(s+1)^2} + \frac{100}{s(s+1)^2} \\ &= \frac{20}{s+1} + \frac{220}{(s+1)^2} + \frac{1}{s}\frac{100}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

Do item 7 da tabela com $a = -1$, temos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{20}{s+1}\right\} = 20e^{-t}.$$

Do item 8 da tabela com $a = -1$, temos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{220}{(s+1)^2}\right\} = 220te^{-t}.$$

Usando a propriedade da integral e o item 8 da tabela com $a = -1$, temos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s}\frac{100}{(s+1)^2}\right\} = 100\int_0^t \tau e^{-\tau}d\tau = 100\, e^{-\tau}(-\tau-1)\Big|_0^t = 100 - 100e^{-t} - 100te^{-t} \tag{6}$$

Somando os termos, temos:

$$u(t) = 100 - 80e^{-t} + 120te^{-t}$$

Agora, usando a equação 4:

$$\begin{aligned}
Q(s) &= \frac{200}{s} + \eta\frac{100}{s^2} - \frac{U(s)}{s} \\
&= \frac{200}{s} + \frac{100}{s^2} - \left[\frac{20}{s(s+1)} + \frac{220}{s(s+1)^2} + \frac{1}{s^2}\frac{100}{(s+1)^2}\right] \\
&= \frac{200}{s} + \frac{100}{s^2} - \frac{20}{s(s+1)} - \frac{220}{s(s+1)^2} - \frac{1}{s^2}\frac{100}{(s+1)^2}
\end{aligned}$$

Do item 1 da tabela, temos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{200}{s}\right\} = 200.$$

Do item 2 da tabela, temos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{100}{s^2}\right\} = 100t.$$

Do item 11 da tabela com $a = 0$ e $b = -1$, temos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{20}{s(s+1)}\right\} = 20 - 20e^{-t}.$$

Da equação 6, temos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s}\frac{220}{(s+1)^2}\right\} = 220 - 220e^{-t} - 220te^{-t}$$

Usando a propriedade da integral e equação 6, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s^2}\frac{100}{(s+1)^2}\right\} &= \int_0^t \left(100 - 100e^{-\tau} - 100\tau e^{-\tau}\right) d\tau \\
&= 100t + 100(e^{-t} - 1) - \int_0^t 100\tau e^{-\tau}d\tau \\
&= -200 + 100t + 200e^{-t} + 100te^{-t}
\end{aligned}$$

Somando todos os termos, temos:

$$\begin{aligned}
q(t) &= 200 + 100t - \left(20 - 20e^{-t}\right) - \left(220 - 220e^{-t} - 220te^{-t}\right) - \left(-200 + 100t + 200e^{-t} + 100te^{-t}\right) \\
&= 160 + 40e^{-t} + 120te^{-t}
\end{aligned}$$

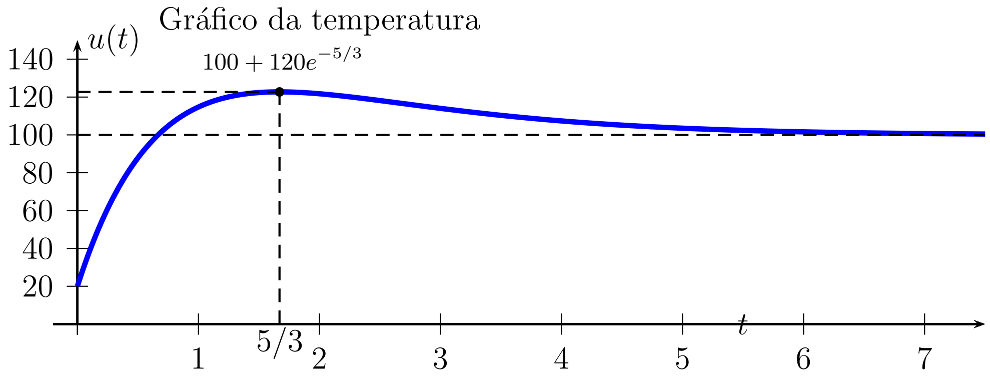
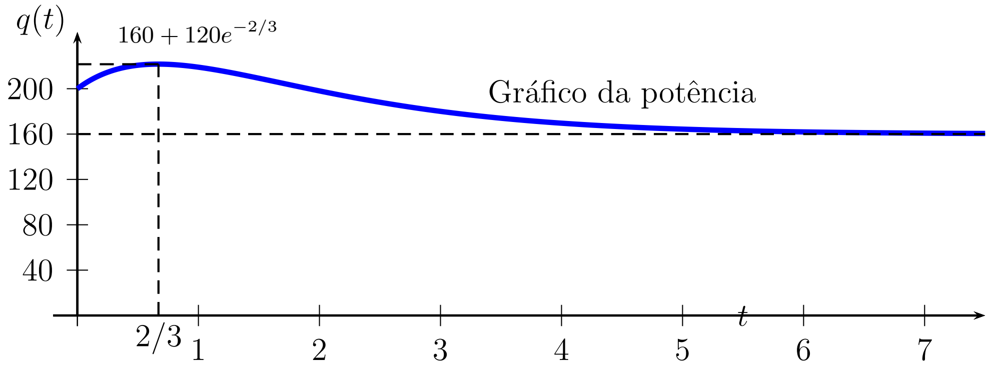


Gráfico da temperatura
$u(t)$
$100+120e^{-5/3}$
140
120
100
80
60
40
20
t
1
$5/3$
2
3
4
5
6
7



$q(t)$
$160+120e^{-2/3}$
Gráfico da potência
200
160
120
80
40
t
$2/3$
1
2
3
4
5
6
7