UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2019/1
Prova da área IIA

1 - 5	6	7	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})\hat{s}$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, \ldots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\mathrm{Si}\,(t) = \int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}x^n e^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x}\operatorname{sen}(wx)\,dx = \dfrac{e^{\lambda x}(\lambda\operatorname{sen}(wx) - w\cos(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

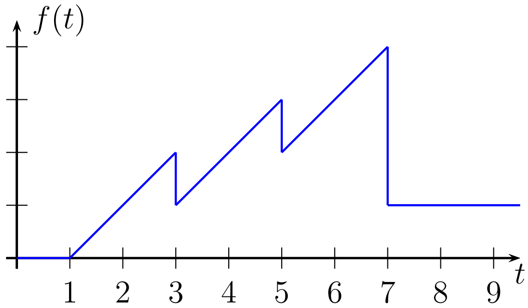
Tabela de transformadas de Laplace:

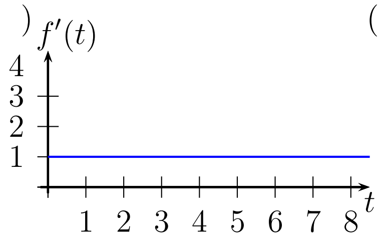
	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n=1,2,3,...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k>0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n=1,2,3...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k>0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a\neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a\neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at}-be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2+w^2}$	$\frac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\operatorname{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt-\operatorname{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\operatorname{sen}(wt)-wt\cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\operatorname{sen}(wt)+wt\cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}, \quad (a^2\neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos(at)-\cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\operatorname{sen}(at)\cosh(at)- -\cos(at)\operatorname{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at))$
27	$\frac{1}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}(at)-\operatorname{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at)-\cos(at))$

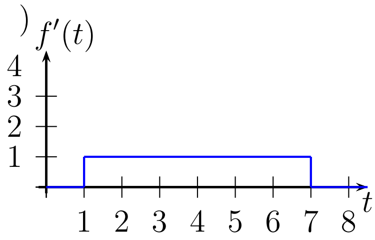
	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
29	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}}I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
33	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k}, \quad (k>0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k>0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k>0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t)-\gamma, \quad (\gamma\approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt}-e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\operatorname{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\operatorname{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a\\ -1, & a<t<2a\end{cases}$ $f(t+2a)=f(t), \quad t>0$
45	$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t)=\begin{cases}\frac{t}{a}, & 0<t<a\\ -\frac{t}{a}+2, & a<t<2a\end{cases}$ $f(t+2a)=f(t), \quad t>0$
46	$\frac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen}(wt), & 0<t<\frac{\pi}{w}\\ 0, & \frac{\pi}{w}<t<\frac{2\pi}{w}\end{cases}$ $f\left(t+\frac{2\pi}{w}\right)=f(t), \quad t>0$
47	$\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t)=\lvert\operatorname{sen}(wt)\rvert$
48	$\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t)=\frac{t}{a}, \quad 0<t<a$ $f(t)=f(t-a), \quad t>a$

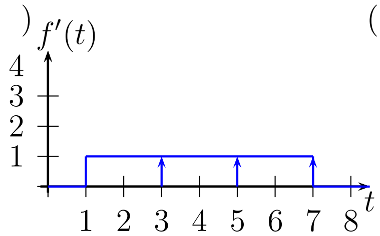
- **Questão 1** (1.0 ponto) Considere a função $f(t)$ dada pelo gráfico abaixo:

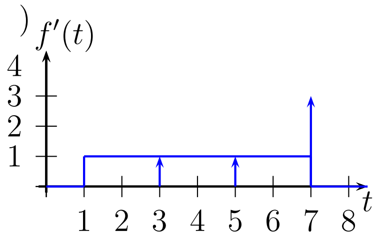
Assinale na primeira coluna a alternativa que represente o gráfico de $f'(t)$ e, na segunda, a expressão para $\mathcal{L}\{f'(t)\}$.

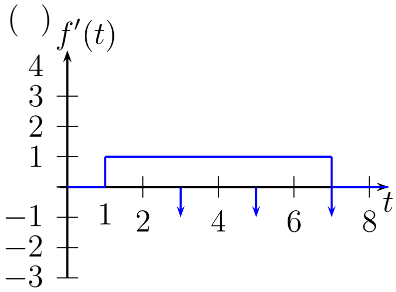


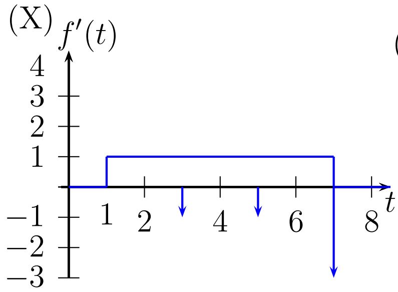
( )


( )


( )


( )


( )


(X)


Assinale a expressão para $\mathcal{L}\{f'(t)\}$

( ) $\dfrac{e^{-s}+3e^{-7s}+se^{-3s}+se^{-5s}+se^{-7s}}{s}$

( ) $\dfrac{e^{-s}-e^{-7s}+se^{-3s}+se^{-5s}+3se^{-7s}}{s}$

( ) $\dfrac{e^{-s}-e^{-7s}-se^{-3s}-se^{-5s}-se^{-7s}}{s}$

(X) $\dfrac{e^{-s}-e^{-7s}-se^{-3s}-se^{-5s}-3se^{-7s}}{s}$

( ) $\dfrac{e^{-s}+e^{-7s}}{s}$

Solução: A função $f'(t)$ pode ser obtida fazendo uma leitura direta do gráfico da f. Alternativamente, escrevemos $f(t)$ em termos de funções de Heaviside e derivamos:

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-1)u(t-1) + (1-t+t-2)u(t-3) + (2-t+t-3)u(t-5) + (3-t+1)u(t-7) \\ &= (t-1)u(t-1) - u(t-3) - u(t-5) - (t-4)u(t-7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t-1)\delta(t-1) + u(t-1) - \delta(t-3) - \delta(t-5) - (t-4)\delta(t-7) - u(t-7) \\ &= u(t-1) - u(t-7) - \delta(t-3) - \delta(t-5) - 3\delta(t-7) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-7s}}{s} - e^{-3s} - e^{-5s} - 3e^{-7s}.$$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Seja

$$F(s) = \frac{s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)}$$

Assinale as alternativas que indicam respectivamente uma expressão equivalente para $F(s)$ e $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

( ) $F(s) = \dfrac{2}{(s+1)^2} + \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2}$

( ) $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{2}{s+2}$

(X) $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{1}{s+2}$

( ) $F(s) = \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{2}{s+2}$

( ) $F(s) = \dfrac{2}{(s+1)^2} - \dfrac{2}{s+2}$

( ) $f(t) = (2+t)e^{-t} + e^{-2t}$

(X) $f(t) = (2+t)e^{-t} - e^{-2t}$

( ) $f(t) = (1+2t)e^{-t} - e^{-2t}$

( ) $f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

( ) $f(t) = 2te^{-t} + e^{-2t}$

Solução: Primeiro usamos frações parciais para escrever $F(s)$ na forma desejada. Fazemos

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)} \\
&= \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \\
&= \frac{A(s+2) + B(s+1)(s+2) + C(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)} \\
&= \frac{s^2(B+C) + s(A+3B+2C) + 2A + 2B + C}{(s+1)^2(s+2)}
\end{aligned}$$

para obter o sistema

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ A + 3B + 2C = 5 \\ 2A + 2B + C = 5. \end{cases}$$

Substituímos $C = 1 - B$ nas duas últimas equações e obtermos

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 2A + B = 4. \end{cases},$$

cuja solução é $A = 1$ e $B = 2$. Portanto, $C = -1$.

A transformada inversa pode ser obtida direto dos itens 7 e 8 da tabela.

• **Questão 3** (1.0 ponto) Um certo medicamento é absorvido instantaneamente e permanece homogeneamente distribuído na corrente sanguínea depois de administrado. A variação de concentração desse medicamento é proporcional à concentração $c(t)$ com uma taxa de proporcionalidade de $\tau = 1$ s. Considere a situação onde a concentração inicial era nula, isto é, $c(0) = 0$ e o indivíduo tomou três doses da substância, a primeira em $t = 0$, a segunda em $t = 2$ e a última em $t = 5$, todas com concentração $c_0 = 2$ mg/l. Assinale as alternativas que indicam respectivamente um modelo matemático para a concentração $c(t)$ e a solução $c(t)$.

(X) $c(t) + c'(t) = 2\delta(t) + 2\delta(t-2) + 2\delta(t-5)$

( ) $2c(t) + c'(t) = \delta(t) + \delta(t-2) + \delta(t-5)$

( ) $c(t) + 2c'(t) = \delta(t) + \delta(t-2) + \delta(t-5)$

( ) $c(t) + c'(t) = 2\delta(t-2) + 2\delta(t-5)$

( ) $c(t) + c'(t) = \delta(t) + \delta(t-2) + \delta(t-5)$

( ) $c(t) = u(t)e^{-t} + u(t-2)e^{-t+2} + u(t-5)e^{-t+5}$

( ) $c(t) = e^{-t} + e^{-t+2} + e^{-t+5}$

( ) $c(t) = 2e^{-t} + 2e^{-t+2} + 2e^{-t+5}$

( ) $c(t) = 2u(t-2)e^{-t+2} + 2u(t-5)e^{-t+5}$

(X) $c(t) = 2u(t)e^{-t} + 2u(t-2)e^{-t+2} + 2u(t-5)e^{-t+5}$

Solução: Considerando que a variação de concentração desse medicamento é proporcional à concentração $c(t)$ com uma taxa de proporcionalidade de $\tau = 1$ s., concluímos que a parte homogênea da equação é $c'(t) = -c(t)$. Adicionando os termos forçantes, temos: $c(t) + c'(t) = 2\delta(t) + 2\delta(t-2) + 2\delta(t-5)$.

Agora, aplicamos a transformada de Laplace para resolver o problema. Temos

$$(s+1)C = 2 + 2e^{-2s} + 2e^{-5s},$$

isto é,

$$C = \frac{2 + 2e^{-2s} + 2e^{-5s}}{s+1}.$$

A tranformada inversa é calculada pelo item 7 da tabela, combinada com a propriedade da translação em t:

$$c(t) = 2u(t)e^{-t} + 2u(t-2)e^{-(t-2)} + 2u(t-5)e^{-(t-5)}.$$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Assinale as alternativas que indicam as transformadas inversas das funções $F(s) = \dfrac{s}{s^4+64}$ e $G(s) = \dfrac{s}{(s-2)^4+64}$ respectivamente.

( ) $\cos(8t)$

(X) $\dfrac{1}{8}\operatorname{sen}(2t)\operatorname{senh}(2t)$

( ) $\dfrac{1}{64}\operatorname{sen}(8t)\operatorname{senh}(8t)$

( ) $\dfrac{1}{64}\cos(8t)\cosh(8t)$

( ) $\dfrac{1}{8}\operatorname{sen}(4t)\operatorname{senh}(4t)$

( ) $e^{2t}\left(\dfrac{1}{8}\operatorname{sen}(2t)\operatorname{senh}(2t)\right)$

( ) $e^{2t}\cos(8t)$

( ) $e^{-2t}\left(\dfrac{1}{64}\operatorname{sen}(8t)\operatorname{senh}(8t)\right)$

( ) $\dfrac{e^{-2t}}{8}\left(\operatorname{sen}(4t)\operatorname{senh}(4t) + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(4t)\cosh(4t) - \dfrac{1}{2}\cos(4t)\operatorname{senh}(4t)\right)$

(X) $\dfrac{e^{2t}}{8}\left(\operatorname{sen}(2t)\operatorname{senh}(2t) + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\cosh(2t) - \dfrac{1}{2}\cos(2t)\operatorname{senh}(2t)\right)$

Solução: Aplicamos diretamente o item 26 da tabela, com $a = 2$, para calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+64}\right\} = \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t)\operatorname{senh}(2t).$$

Para calcular a transformada inversa de $G(s)$, fazemos:

$$G(s) = \frac{s}{(s-2)^4+64} = \frac{s-2}{(s-2)^4+64} + \frac{2}{(s-2)^4+64}$$

e usamos os itens 25 e 26 da tabela combinados com a propriedade da translação em s:

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{e^{2t}}{8}\operatorname{sen}(2t)\operatorname{senh}(2t) + \frac{e^{2t}}{16}\operatorname{sen}(2t)\cosh(2t) - \frac{e^{2t}}{16}\cos(2t)\operatorname{senh}(2t).$$

• **Questão 5** (1.0 ponto) Dada a equação $f(t) = \int_0^t f(\tau)(t-\tau)d\tau + 1$, assinale as alternativas que indicam respectivamente $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $f(t)$.

( ) $F(s) = \dfrac{1}{s^2-1}$

( ) $F(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2-1}$

( ) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$

(X) $F(s) = \dfrac{s}{s^2-1}$

( ) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$

( ) $f(t) = \text{senh}(t)$

( ) $f(t) = \cos(t)$

(X) $f(t) = \cosh(t)$

( ) $f(t) = \text{sen}(t)$

( ) $f(t) = e^t\,(\text{senh}(t) + \cosh(t))$

Solução: Dado que $f(t) = \int_0^t f(\tau)(t-\tau)d\tau + 1$, temos:

$$F(s) = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

Logo,

$$\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) F(s) = \frac{1}{s},$$

ou ainda

$$\frac{s^2-1}{s} F(s) = 1.$$

Portanto,

$$F(s) = \frac{s}{s^2-1}.$$

A transformada inversa é obtida diretamente do item 16 da tabela:

$$f(t) = \cosh(t).$$

• **Questão 6** (2.5 ponto) A temperatura em um forno industrial evolui no tempo conforme o seguinte modelo simplificado:

$$\begin{cases} v'(t) = -2(v(t) - T_a) + q(t) \\ q(t) = 6\displaystyle\int_0^t (T_f - v(\tau))d\tau + 3(T_f - v(t)) \\ v(0) = 20 \end{cases}$$

onde $v(t)$ representa a temperatura medida no forno, $T_a = 20^0$C é temperatura ambiente, $T_f = 50^0$C é temperatura de controle, $q(t)$ é a potência de aquecimento. Use as técnicas das transformadas de Laplace para resolver o problema acima.

a) (1.25) Calcule as transformadas de Laplace $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$ e $Q(s) = \mathcal{L}\{q(t)\}$ e preencha os retângulos abaixo:

V(s) =	Q(s) =

b) (1.25) Calcule $v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$ e $q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}$ e preencha os retângulos abaixo:

v(t) =	q(t) =

Solução: a) Temos:

$$\begin{cases} sV - 20 = -2V + \dfrac{40}{s} + Q \\ Q = \dfrac{300}{s^2} - \dfrac{6V}{s} + \dfrac{150}{s} - 3V \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, temos:

$$sV - 20 = -2V + \frac{40}{s} + \frac{300}{s^2} - \frac{6V}{s} + \frac{150}{s} - 3V.$$

Logo,

$$(s^2 + 5s + 6)V = 190 + \frac{300}{s} + 20s$$

e

$$\begin{aligned} V &= \frac{20s^2 + 190s + 300}{s(s^2 + 5s + 6)} \\ &= \frac{20s^2 + 190s + 300}{s(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{10(s+2)(2s+15)}{s(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{10(2s+15)}{s(s+3)} \\ &= \frac{50}{s} - \frac{30}{s+3}. \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{300}{s^2} - \frac{6V}{s} + \frac{150}{s} - 3V \\
&= \frac{300}{s^2} - \frac{6}{s}\left(\frac{50}{s} - \frac{30}{s+3}\right) + \frac{150}{s} - 3\left(\frac{50}{s} - \frac{30}{s+3}\right) \\
&= \frac{180}{s(s+3)} + \frac{90}{s+3} \\
&= \frac{180+90s}{s(s+3)} \\
&= \frac{60}{s} + \frac{30}{s+3}.
\end{aligned}$$

As transformadas inversas são:

$$\begin{aligned}
v(t) =& 50 - 30e^{-3t} \\
q(t) =& 60 + 30e^{-3t}.
\end{aligned}$$

- **Questão 7** (2.5 pontos) Calcule a transformada de Laplace $f(t) := |\operatorname{sen}(\pi t)|$.

  a) (1.25 ponto) Escrevendo-a como o somatório:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_k^{k+1} \operatorname{sen}(\pi t)e^{-st}dt.$$

  b) (1.25 ponto) Usando a propriedade da função periódica.

Solução: a) Usando o formulário, temos:

$$\begin{aligned}
F(s) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_k^{k+1} \operatorname{sen}(\pi t)e^{-st}dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left[\frac{e^{-st}(-s\operatorname{sen}(\pi t) - \pi\cos(\pi t))}{s^2+\pi^2}\right]_{t=k}^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left[\left(\frac{e^{-s(k+1)}(-s\operatorname{sen}(\pi(k+1)) - \pi\cos(\pi(k+1)))}{s^2+\pi^2}\right) - \frac{e^{-sk}(-s\operatorname{sen}(\pi k) - \pi\cos(\pi k))}{s^2+\pi^2}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-e^{-sk}) \left[\left(\frac{e^{-s}(-\pi((-1)^{k+1}))}{s^2+\pi^2}\right) - \frac{(-\pi(-1)^k)}{s^2+\pi^2}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-e^{-sk})(-1)^k \left[\left(\frac{\pi e^{-s}}{s^2+\pi^2}\right) + \frac{\pi}{s^2+\pi^2}\right] \\
&= \left[\left(\frac{\pi e^{-s}}{s^2+\pi^2}\right) + \frac{\pi}{s^2+\pi^2}\right]\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-s})^k \\
&= \frac{\pi e^{-s}+\pi}{(s^2+\pi^2)(1-e^{-s})}.
\end{aligned}$$

Solução: b) O período da função $f(t)$ é $T=1$. Assim, usamos a propriedade da função periódica para calcular:

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi t)e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-s}}\left[\frac{e^{-st}(-s\operatorname{sen}(\pi t) - \pi\cos(\pi t))}{s^2+\pi^2}\right]_{t=0}^{1} \\
&= \frac{1}{1-e^{-s}}\left[\left(\frac{e^{-s}(-s\operatorname{sen}(\pi) - \pi\cos(\pi))}{s^2+\pi^2}\right) - \left(\frac{(-s\operatorname{sen}(0) - \pi\cos(0))}{s^2+\pi^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{1-e^{-s}}\left[\left(\frac{\pi e^{-s}}{s^2+\pi^2}\right) + \left(\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\right)\right] \\
&= \frac{\pi e^{-s}+\pi}{(s^2+\pi^2)(1-e^{-s})}.
\end{aligned}$$