UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2019/2
Prova da área IIA

1 - 5	6	7	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})\hat{s}$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3\cdots, \quad -1<x<1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1<x<1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty<x<\infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1<x<1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1<x<1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty<x<\infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty<x<\infty$
$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty<x<\infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty<x<\infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1<x<1,\ m \neq 0, 1, 2, ...$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k>0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$

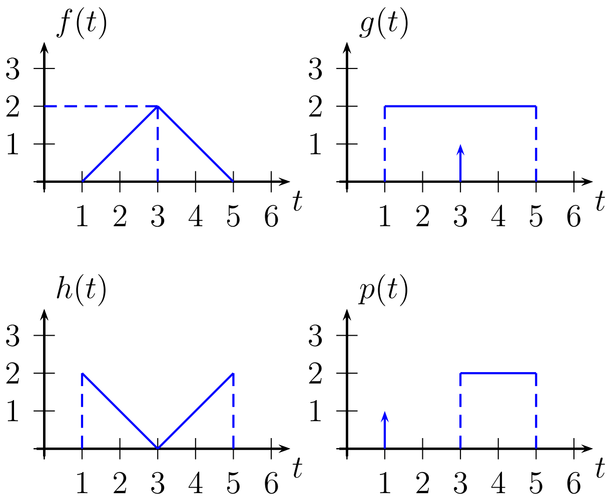
Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x}\operatorname{sen}(w x)\,dx = \dfrac{e^{\lambda x}(\lambda\operatorname{sen}(wx) - w\cos(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n=1,2,3,...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k>0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n=1,2,3...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k>0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a\neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a\neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at}-be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2+w^2}$	$\frac{1}{w}\,\mathrm{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\,\mathrm{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\,\mathrm{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt-\mathrm{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\mathrm{sen}(wt)-wt\cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{t}{2w}\,\mathrm{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\mathrm{sen}(wt)+wt\cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}, \quad (a^2\neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos(at)-\cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\mathrm{sen}(at)\cosh(at)-\cos(at)\,\mathrm{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\,\mathrm{sen}(at)\,\mathrm{senh}(at))$
27	$\frac{1}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^3}(\mathrm{senh}(at)-\mathrm{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at)-\cos(at))$
29	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}}I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
33	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k}, \quad (k>0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k>0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k>0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t)-\gamma, \quad (\gamma\approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt}-e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\,\mathrm{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\mathrm{Si}\,(t)$
44	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a\\ -1, & a<t<2a\end{cases}$ $f(t+2a)=f(t), \quad t>0$
45	$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t)=\begin{cases}\frac{t}{a}, & 0<t<a\\ -\frac{t}{a}+2, & a<t<2a\end{cases}$ $f(t+2a)=f(t), \quad t>0$
46	$\frac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t)=\begin{cases}\mathrm{sen}(wt), & 0<t<\frac{\pi}{w}\\ 0, & \frac{\pi}{w}<t<\frac{2\pi}{w}\end{cases}$ $f\left(t+\frac{2\pi}{w}\right)=f(t), \quad t>0$
47	$\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t)=\lvert\mathrm{sen}(wt)\rvert$
48	$\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t)=\frac{t}{a}, \quad 0<t<a$ $f(t)=f(t-a), \quad t>a$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere as seguintes funções, gráficos de funções e transformadas de Laplace:



$$q(t) = 2u(t-1) + \delta(t-3) - 2u(t-5)$$
$$r(t) = \delta(t-1) + 2u(t-3) - 2u(t-5)$$
$$s(t) = -(t-3)u(t-1) + 2(t-3)u(t-3) - (t-3)u(t-5)$$
$$u(t) = (t-1)u(t-1) - 2(t-3)u(t-3) + (t-5)u(t-5)$$

$$V(s) = \frac{e^{-s} - 2e^{-3s} + e^{-5s}}{s^2}$$
$$W(s) = \frac{se^{-s} + 2e^{-3s} - 2e^{-5s}}{s}$$
$$X(s) = \frac{2e^{-s} + se^{-3s} - 2e^{-5s}}{s}$$
$$Z(s) = \frac{(2s-1)e^{-s} + 2e^{-3s} - (2s+1)e^{-5s}}{s^2}$$

Assinale as alternativas que relacionam corretamente os gráficos e as funções e os gráficos e as transformadas de Laplace, respectivamente.

( ) $f(t) = q(t)$; $g(t) = r(t)$; $h(t) = s(t)$; $p(t) = u(t)$.

( ) $f(t) = u(t)$; $g(t) = r(t)$; $h(t) = s(t)$; $p(t) = q(t)$.

( ) $f(t) = s(t)$; $g(t) = r(t)$; $h(t) = u(t)$; $p(t) = q(t)$.

( ) $f(t) = s(t)$; $g(t) = q(t)$; $h(t) = u(t)$; $p(t) = r(t)$.

(X) $f(t) = u(t)$; $g(t) = q(t)$; $h(t) = s(t)$; $p(t) = r(t)$.

( ) $\mathcal{L}\{f(t)\} = V(s)$; $\mathcal{L}\{g(t)\} = W(s)$; $\mathcal{L}\{h(t)\} = X(s)$; $\mathcal{L}\{p(t)\} = Z(s)$.

(X) $\mathcal{L}\{f(t)\} = V(s)$; $\mathcal{L}\{g(t)\} = X(s)$; $\mathcal{L}\{h(t)\} = Z(s)$; $\mathcal{L}\{p(t)\} = W(s)$.

( ) $\mathcal{L}\{f(t)\} = Z(s)$; $\mathcal{L}\{g(t)\} = W(s)$; $\mathcal{L}\{h(t)\} = X(s)$; $\mathcal{L}\{p(t)\} = V(s)$.

( ) $\mathcal{L}\{f(t)\} = Z(s)$; $\mathcal{L}\{g(t)\} = X(s)$; $\mathcal{L}\{h(t)\} = W(s)$; $\mathcal{L}\{p(t)\} = V(s)$.

( ) $\mathcal{L}\{f(t)\} = X(s)$; $\mathcal{L}\{g(t)\} = V(s)$; $\mathcal{L}\{h(t)\} = Z(s)$; $\mathcal{L}\{p(t)\} = W(s)$.

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere a função

$$F(s) = \frac{6s^2 - 22s + 18}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

Assinale as alternativas que indicam respectivamente uma expressão equivalente para $F(s)$ e $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

( ) $F(s) = \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{3}{s-2} + \dfrac{2}{s-3}$

( ) $F(s) = \dfrac{2}{s-1} + \dfrac{3}{s-2} + \dfrac{1}{s-3}$

(X) $F(s) = \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{2}{s-2} + \dfrac{3}{s-3}$

( ) $F(s) = \dfrac{3}{s-1} + \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{2}{s-3}$

( ) $F(s) = \dfrac{2}{s-1} + \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{3}{s-3}$

( ) $f(t) = e^{-t} + 3e^{-2t} + 2e^{-3t}$

( ) $f(t) = 2e^{-t} + 3e^{-2t} + e^{-3t}$

( ) $f(t) = 3e^{t} + e^{2t} + 2e^{-3t}$

(X) $f(t) = e^{t} + 2e^{2t} + 3e^{3t}$

( ) $f(t) = 2e^{t} + e^{2t} + 3e^{3t}$

( ) $f(t) = e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{-3t}$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Assinale as alternativas que indicam as transformadas de Laplace das funções $f(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$ e $g(t) = \delta(t-1)f(t)$, respectivamente.

(X) $\dfrac{1}{(s+2)(s+3)}$

( ) $\dfrac{1}{(s-2)(s-3)}$

( ) $\dfrac{s}{(s+2)(s+3)}$

( ) $\dfrac{s}{(s-2)(s-3)}$

( ) $-\dfrac{1}{(s+2)(s+3)}$

( ) $e^{-2} - e^{-3}$

( ) 0

(X) $e^{-s-2} - e^{-s-3}$

( ) $e^{s-2} - e^{s-3}$

( ) e^{-s}

• **Questão 4** (1.0 ponto) Assinale as alternativas que indicam as transformadas inversas das funções $F(s) = \dfrac{4se^{-s}}{(s^2+4)^2}$ e $G(s) = \dfrac{4(s-1)e^{-s}}{((s-1)^2+4)^2}$, respectivamente.

( ) $t\,\mathrm{sen}(t)$

( ) $t\,\mathrm{sen}(2t)$

( ) $u(t-1)t\,\mathrm{sen}(2t)$

(X) $u(t-1)(t-1)\,\mathrm{sen}(2(t-1))$

( ) $u(t-1)(t-1)\,\mathrm{sen}(2t)$

( ) $u(t-1)(t-1)e^{t-1}\,\mathrm{sen}(2(t-1))$

( ) $u(t-1)(t-1)e^{1-t}\,\mathrm{sen}(2(t-1))$

(X) $u(t-1)(t-1)e^{t-1}\,\mathrm{sen}(2(t-1))$

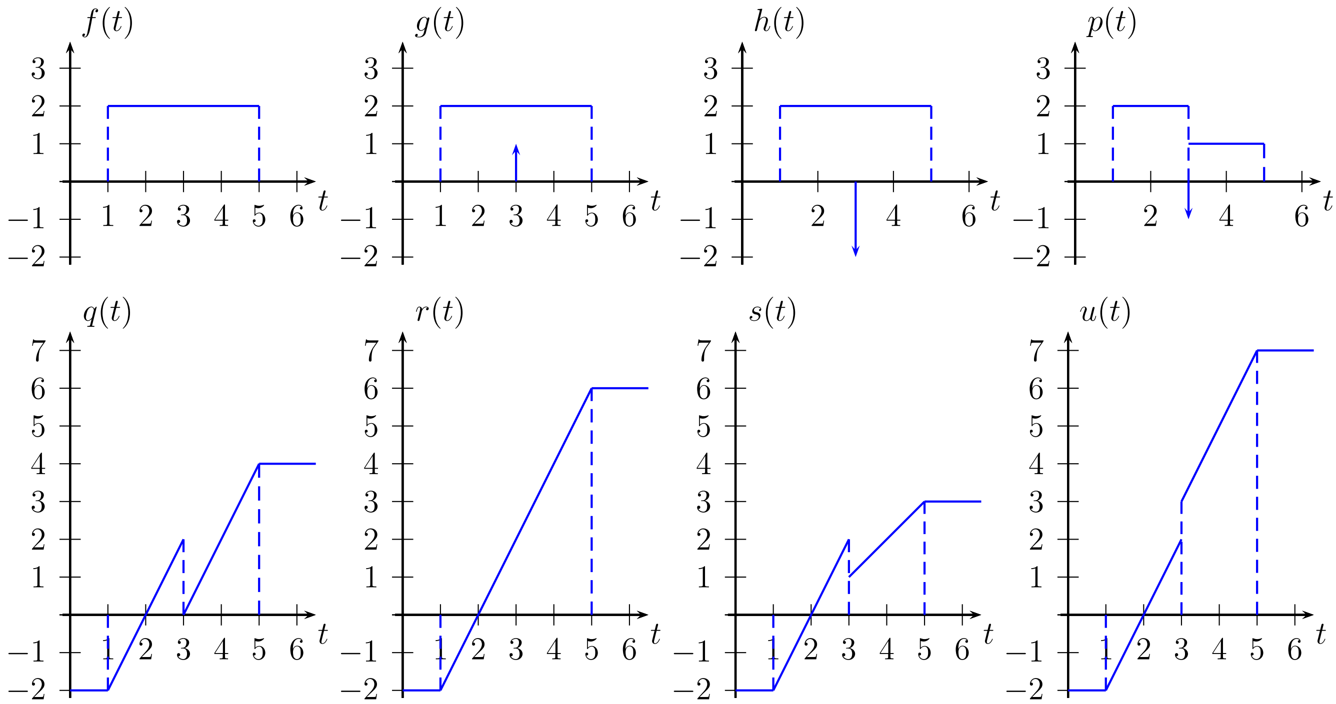
( ) $te^{-t}\,\mathrm{sen}(t)$

( ) $te^{1-t}\,\mathrm{sen}(2t)$

( ) $u(t-1)te^{1-t}\,\mathrm{sen}(2t)$

( ) $u(t-1)(t-1)e^{1-t}\,\mathrm{sen}(2t)$

• **Questão 5** (1.0 ponto) Considere os seguintes gráficos de funções e transformadas de Laplace:



$$V(s) = \frac{-2s + 2e^{-s} - (s+1)e^{-3s} - e^{-5s}}{s^2}, \qquad W(s) = \frac{-2s + 2e^{-s} - 2se^{-3s} - 2e^{-5s}}{s^2}, \tag{1}$$

$$X(s) = \frac{-2s + 2e^{-s} + se^{-3s} - 2e^{-5s}}{s^2}, \qquad Z(s) = \frac{-2s + 2e^{-s} - 2e^{-5s}}{s^2}. \tag{2}$$

Assinale as alternativas que relacionam corretamente os gráficos entre si os gráficos e as transformadas de Laplace, respectivamente.

( ) $f(t) = q'(t)$; $g(t) = r'(t)$; $h(t) = s'(t)$; $p(t) = u'(t)$.

( ) $f(t) = r'(t)$; $g(t) = q'(t)$; $h(t) = s'(t)$; $p(t) = u'(t)$.

( ) $f(t) = r'(t)$; $g(t) = s'(t)$; $h(t) = u'(t)$; $p(t) = q'(t)$.

(X) $f(t) = r'(t)$; $g(t) = u'(t)$; $h(t) = q'(t)$; $p(t) = s'(t)$.

( ) $f(t) = r'(t)$; $g(t) = u'(t)$; $h(t) = s'(t)$; $p(t) = q'(t)$.

( ) $\mathcal{L}\{q(t)\} = X(s)$; $\mathcal{L}\{r(t)\} = Z(s)$; $\mathcal{L}\{s(t)\} = W(s)$; $\mathcal{L}\{u(t)\} = V(s)$.

(X) $\mathcal{L}\{q(t)\} = W(s)$; $\mathcal{L}\{r(t)\} = Z(s)$; $\mathcal{L}\{s(t)\} = V(s)$; $\mathcal{L}\{u(t)\} = X(s)$.

( ) $\mathcal{L}\{q(t)\} = Z(s)$; $\mathcal{L}\{r(t)\} = X(s)$; $\mathcal{L}\{s(t)\} = V(s)$; $\mathcal{L}\{u(t)\} = W(s)$

( ) $\mathcal{L}\{q(t)\} = Z(s)$; $\mathcal{L}\{r(t)\} = W(s)$; $\mathcal{L}\{s(t)\} = X(s)$; $\mathcal{L}\{u(t)\} = V(s)$

( ) $\mathcal{L}\{q(t)\} = V(s)$; $\mathcal{L}\{r(t)\} = X(s)$; $\mathcal{L}\{s(t)\} = W(s)$; $\mathcal{L}\{u(t)\} = Z(s)$

- **Questão 6** (2.5 ponto) Resolva a seguinte equação integro-diferencial:

$$\begin{cases} f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) + 4\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau = 1 - 3e^{-2t}, \\ f(0) = 0, \\ f'(0) = 1. \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{aligned}
s^2F - 1 + 2sF + 2F + \frac{4F}{s} &= \frac{1}{s} - \frac{3}{s+2} \\
&\Downarrow \\
\left(s^2 + 2s + 2 + \frac{4}{s}\right) F &= 1 + \frac{1}{s} - \frac{3}{s+2} \\
&\Downarrow \\
\left(s^3 + 2s^2 + 2s + 4\right) F &= s + 1 - \frac{3s}{s+2} \\
&\Downarrow \\
(s^2+2)(s+2)F &= \frac{(s+1)(s+2) - 3s}{s+2} \\
&\Downarrow \\
F &= \frac{(s+1)(s+2) - 3s}{(s+2)^2(s^2+2)} \\
&\Downarrow \\
F &= \frac{s^2 + 3s + 2 - 3s}{(s+2)^2(s^2+2)} \\
&\Downarrow \\
F &= \frac{1}{(s+2)^2} \\
&\Downarrow \\
f(t) &= te^{-2t}.
\end{aligned}$$

- **Questão 7** (2.5) Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + y(t) \\ y'(t) &= \alpha x(t) - 2y(t) \end{aligned}$$

Com $x(0) = 0$ e $y(0) = 3$, onde α é uma constante real.

a) (0.5) Assinale a alternativa que indica o tipo de amortecimento do sistema dado para os valores de α dados respectivamente por -1, 0, 1 e 2:

( ) Sem amortecimento, subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido.
( ) Subamortecido, subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido.
(X) Subamortecido, criticamente amortecido, superamortecido e superamortecido.
( ) Superamortecido, superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido.
( ) Superamortecido, criticamente amortecido, subamortecido e subamortecido.
( ) Superamortecido, criticamente amortecido, subamortecido e sem amortecimento.

b) (2.0) Use a técnica da Transformada de Laplace para encontrar uma expressão para $x(t)$ e $y(t)$ quando $\alpha = 1$. Reproduza abaixo as expressões encontradas:

$X(s) =$	$Y(s) =$
$x(t) =$	$y(t) =$

Solução:

$$\begin{array}{ccc} (s+2)X - Y = 0 & \text{e} & -X + (s+2)Y = 3 \\ & \Downarrow & \\ (s+2)X - Y = 0 & \text{e} & -(s+2)X + (s+2)^2 Y = 3(s+2). \end{array}$$

Somando as duas equações, temos:

$$\begin{aligned} ((s+2)^2 - 1)Y &= 3(s+2) \\ &\Downarrow \\ Y &= \frac{3(s+2)}{((s+2)^2 - 1)} \\ &= \frac{3(s+2)}{s^2 + 4s + 3} \\ &= \frac{3(s+2)}{(s+1)(s+3)} \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}\right). \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{array}{ccc} (s+2)X - Y = 0 & \text{e} & -X + (s+2)Y = 3 \\ & \Downarrow & \\ (s+2)^2 X - (s+2)Y = 0 & \text{e} & -X + (s+2)Y = 3. \end{array}$$

Somando as duas equações, temos:

$$\begin{aligned}
((s+2)^2-1)X &= 3 \\
&\Downarrow \\
X &= \frac{3}{((s+2)^2-1)} \\
&= \frac{3}{s^2+4s+3} \\
&= \frac{3}{(s+1)(s+3)} \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\right).
\end{aligned}$$

Calculamos as transformadas inversas para obter:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3}{2}\left(e^{-t}+e^{-3t}\right) \\
y(t) &= \frac{3}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right).
\end{aligned}$$