UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2022/1
Prova da área IIA

1 - 5	6	7	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Gabaritos.

• **Questão 1** Considere $y(t)$ tal que $\begin{cases} y' + 3y = 6, & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$.

É correto: (0.8pt)

( ) $Y(s) = \dfrac{6}{s(s+3)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{s-6}{s(s+3)}$

(X) $Y(s) = \dfrac{s+6}{s(s+3)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{6}{s+3}$

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (0.8pt)

(X) $y(t) = 2 - e^{-3t}$

( ) $y(t) = 2 - 2e^{-3t}$

( ) $y(t) = 6e^{-3t}$

( ) $y(t) = 2 - 3e^{-3t}$

( ) nenhuma das anteriores

$$sY - 1 + 3Y = \frac{6}{s} \Rightarrow Y = \frac{6}{s(s+3)} + \frac{1}{s+3} = \frac{s+6}{s(s+3)}$$

decomposição em frações parciais: $\dfrac{6}{s(s+3)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+3} = \dfrac{A(s+3)+Bs}{s(s+3)}$

então $6 = A(s+3) + Bs$ $\forall s$ e assim $s = -3 \Rightarrow B = -2; s = 0 \Rightarrow A = 2$ e segue

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s} - \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s+3}\right) = 2 - e^{-3t}$$

• **Questão 2** Considere $y(t)$ tal que $\begin{cases} y' + 2y = e^t, & t > 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$.

É correto: (0.8pt)

(X) $Y(s) = \dfrac{2s-1}{(s+2)(s-1)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s-1)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{3-2s}{(s+2)(s-1)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{2s+3}{(s+2)(s+1)}$

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (0.8pt)

( ) $y(t) = \dfrac{7}{3}e^{-2t} - \dfrac{1}{3}e^t$

( ) $y(t) = -\dfrac{1}{3}e^{-2t} + \dfrac{1}{3}e^t$

( ) $y(t) = -\dfrac{7}{3}e^{-2t} + \dfrac{1}{3}e^t$

( ) $y(t) = e^{-2t} + e^{-t}$

(X) nenhuma das anteriores

$$sY - 2 + 2Y = \frac{1}{s-1} \Rightarrow Y = \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)(s-1)} = \frac{2s-1}{(s+2)(s-1)}$$

decomposição em frações parciais: $\dfrac{1}{(s+2)(s-1)} = \dfrac{A}{s+2} + \dfrac{B}{s-1} = \dfrac{A(s-1)+B(s+2)}{(s+2)(s-1)}$

então $1 = A(s-1) + B(s+2)$ $\forall s$ e assim $s = 1 \Rightarrow B = \dfrac{1}{3}; s = -2 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{3}$ e segue

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s+2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-1}\right) = \frac{5}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$$

• **Questão 3** Seja $y(t)$ tal que $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2e^{-t}, & t > 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$.

É correto: (0.8pt)

( ) $Y(s) = \dfrac{2}{(s+1)^2(s+2)}$

(X) $Y(s) = \dfrac{1}{s+1)} + \dfrac{2}{(s+1)^2(s+2)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{2-s}{(s+1)(s+2)} + \dfrac{2}{(s+1)^2(s+2)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{4+s}{(s+1)(s+2)} + \dfrac{2}{(s-1)(s+1)(s+2)}$

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (0.8pt)

( ) $y(t) = -2e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-2t}$

( ) $y(t) = 3e^{-t} - 4e^{-2t} + 2te^{-t}$

( ) $y(t) = 2e^{-t} - \dfrac{4}{3}e^{-2t} + 3e^t$

(X) $y(t) = -e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-2t}$

( ) nenhuma das anteriores

$$s^2Y - s(1) - (-1) + 3(sY - 1) + 2Y = \frac{2}{s+1} \Rightarrow (s^2 + 3s + 2)Y = s + 2 + \frac{2}{s+1}$$

$$\text{Baskara: } s^2+3s+2=(s+1)(s+2) \Rightarrow Y=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$\text{decomposição em frações parciais: } \frac{2}{(s+1)^2(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{s+2}=\frac{A(s+1)(s+2)+B(s+2)+C(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$2=A(s+1)(s+2)+B(s+2)+C(s+1)^2 \ \forall s \text{ então } s=-1 \Rightarrow B=2; s=-2 \Rightarrow C=2; s=0 \Rightarrow A=-2$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{s+2}\right)=-e^{-t}+2te^{-t}+2e^{-2t}$$

• **Questão 4** Considere as funções $f(t)=e^{-2t}-e^{-3t}$, $h(t)=u(t-2)f(t)$, $g(t)=\delta(t-1)f(t)$, e as respectivas transformadas de Laplace $F(s)$, $H(s)$ e $G(s)$.

É correto: (0.6pt)

( ) $H(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s+2}-\dfrac{e^{-3s}}{s+3}$

( ) $H(s)=e^{-2s}\dfrac{e^{-4}}{s+2}-e^{-3s}\dfrac{e^{-6}}{s+3}$

( ) $H(s)=e^{-2s}\dfrac{e^{-4}}{s}-e^{-3s}\dfrac{e^{-6}}{s}$

( ) $H(s)=-2\dfrac{e^{-2s}}{s+2}+3\dfrac{e^{-3s}}{s+3}$

(X) nenhuma das anteriores

É correto: (0.6pt)

( ) $G(s)=e^{-2}-e^{-3}$

( ) $G(s)=e^{-2s}-e^{-3s}$

(X) $G(s)=e^{-s-2}-e^{-s-3}$

( ) $G(s)=e^{s-2}-e^{s-3}$

( ) nenhuma das anteriores

Primeiramente, $h(t)=u(t-2)e^{-2t}-u(t-2)e^{-3t}$

$$\mathcal{L}(u(t-2))=\frac{e^{-2s}}{s} \Rightarrow H(s)=\mathcal{L}\left(e^{-2t}u(t-2)-e^{-3t}u(t-2)\right)=\frac{e^{-2(s+2)}}{s+2}-\frac{e^{-2(s+3)}}{s+3}=e^{-2s}\frac{e^{-4}}{s+2}-e^{-2s}\frac{e^{-6}}{s+3}$$

Por outro lado, $G(s)=\int_0^\infty \delta(t-1)f(t)e^{-st}dt=f(1)e^{-s}=(e^{-2}-e^{-3})e^{-s}=e^{-s-2}-e^{-s-3}$

• **Questão 5** (2.0 pontos) Resolva a seguinte equação integro-diferencial:

$$\begin{cases} f''(t)+2f'(t)+2f(t)+4\int_0^t f(\tau)d\tau=1-3e^{-2t}, \\ f(0)=0, \\ f'(0)=1. \end{cases}$$

Solução: $s^2F-s(0)-(1)+2(sF-0)+2F+\dfrac{4F}{s}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{3}{s+2} \Rightarrow (s^2+2s+2)F+\dfrac{4F}{s}=1+\dfrac{1}{s}-\dfrac{3}{s+2}$

$$\Rightarrow \frac{s^3+2s^2+2s+4}{s}F=\frac{s^2+2s+s+2-3s}{s(s+2)} \Rightarrow \left(s^2(s+2)+2(s+2)\right)F=\frac{s^2+2}{s+2} \Rightarrow (s^2+2)(s+2)F=\frac{s^2+2}{s+2}$$

$$\Rightarrow F=\frac{1}{(s+2)^2} \Rightarrow f(t)=te^{-2t}$$

• **Questão 6** Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) &= -2x(t)+y(t), \quad t>0 \\ y'(t) &= \alpha x(t)-2y(t) \end{cases}$$

com $x(0)=0$ e $y(0)=3$, onde α é uma constante real.

(i)(1.0pt) Obtenha condições sobre α que correspondem ao tipos de amortecimento: sub-amortecido, criticamente amortecido e super-amortecido.

(ii)(1.0pt) Ilustre cada um dos casos descritos na parte (i) escolhendo valores específicos para α e obtendo as respectivas soluções $x(t)$ e $y(t)$.

Solução: (i) seja $X(s)=\mathcal{L}(x(t))$, $Y(s)=\mathcal{L}(y(t))$

$$\begin{cases} sX-0=-2X+Y \\ sY-3=\alpha X-2Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s+2)X= & Y \\ (s+2)Y= & 3+\alpha X \end{cases} \Rightarrow (s+2)^2X=(s+2)Y=3+\alpha X \Rightarrow \begin{cases} X=\dfrac{3}{(s+2)^2-\alpha} \\ Y=\dfrac{3(s+2)}{(s+2)^2-\alpha} \end{cases}$$

Caso A : sem amortecimento : $\alpha=0$

Caso B : subamortecido : $\alpha<0$ então $X=\dfrac{3}{(s+2)^2+w^2}, Y=\dfrac{2(s+2)}{(s+2)^2+w^2}$, onde $w=\sqrt{-\alpha}$

Caso C : superamortecido : $\alpha>0$ então $X=\dfrac{3}{(s+2)^2-w^2}, Y=\dfrac{2(s+2)}{(s+2)^2-w^2}$, onde $w=\sqrt{\alpha}$

Solução: (ii)

Caso A: $\alpha=0 \Rightarrow X(s)=\dfrac{3}{(s+2)^2}, Y(s)=\dfrac{3}{(s+2)} \Rightarrow x(t)=3te^{-2t}, y(t)=3e^{-2t}$

Caso B: $\alpha=-1 \Rightarrow X(s)=\dfrac{3}{(s+2)^2+1}, Y(s)=\dfrac{3(s+2)}{(s+2)^2+1} \Rightarrow x(t)=3e^{-2t}\operatorname{sen}(t), y(t)=3e^{-2t}\cos(t)$

Caso C: $\alpha=1 \Rightarrow X(s)=\dfrac{3}{(s+2)^2-1}, Y(s)=\dfrac{3(s+2)}{(s+2)^2-1} \Rightarrow x(t)=3e^{-2t}\operatorname{senh}(t), y(t)=3e^{-2t}\cosh(t)$

□