UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2022/2
Prova da área IIA

1 - 4	5	6	Total

Nome: GABARITO ______________________ **Cartão:** ______________

• **Questão 1** Sejam $y(t)$ tal que $2y + 3\int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau = 6, \quad t \geq 0$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$.

É correto: (0.8pt)

( ) $Y(s) = \dfrac{6}{2s+3}$

(X) $Y(s) = \dfrac{6(s-1)}{s(2s+1)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{6(s+1)}{s(2s+5)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{6(s-1)}{s(2s-1)}$

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (0.8pt)

( ) $y(t) = 9e^{t/2} - 6$

( ) $y(t) = 3e^{-t/2}$

( ) $y(t) = 9e^{-3t/2} - 6$

(X) $y(t) = 9e^{-t/2} - 6$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: pela equação, para $t = 0$ temos $y(0) = 3$. Podemos escrever $2y + 3e^t * y = 6$, e aplicando transformada:

$$2Y + 3\mathcal{L}(e^t)Y = \mathcal{L}(6u(t)) \Rightarrow 2Y + 3\frac{1}{s-1}Y = \frac{6}{s} \Leftrightarrow (2(s-1)+3)Y = \frac{6(s-1)}{s} \Leftrightarrow Y = \frac{6(s-1)}{s(2s+1)}$$

Então $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{6(s-1)}{s(2s+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3(s-1)}{s(s+\frac{1}{2})}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3}{s+\frac{1}{2}} - \dfrac{3}{s(s+\frac{1}{2})}\right)$

$$= 3e^{-t/2} - 3\left[-2e^{-\tau/2}\right]_0^t = 3e^{-t/2} + 6\left(e^{-t/2} - 1\right) = 9e^{-t/2} - 6$$

• **Questão 2** Considere $y(t)$ tal que $\begin{cases} y' + 2y = e^{-2t}, & t > 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$.

É correto: (0.8pt)

( ) $Y(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2}$

(X) $Y(s) = \dfrac{2}{s+2} + \dfrac{1}{(s+2)^2}$

( ) $Y(s) = \dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{(s+2)^2}$

( ) $Y(s) = -\dfrac{2}{s+2} + \dfrac{1}{(s+2)^2}$

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (0.8pt)

(X) $y(t) = 2e^{-2t} + te^{-2t}$

( ) $y(t) = te^{-2t}$

( ) $y(t) = 2 + te^{-2t}$

( ) $y(t) = -2e^{-2t} + te^{-2t}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução:

$$sY - 2 + 2Y = \frac{1}{s+2} \Rightarrow (s+2)Y = 2 + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y = \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}$$
$$\Rightarrow y(t) = 2e^{-2t} + te^{-2t}$$

• **Questão 3** Seja $y(t)$ tal que $\begin{cases} y'' - y = te^{-t}, & t > 0 \\ y(0) = -1, y'(0) = 1 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$.

Solução: (a)

$$s^2Y - s(-1) - 1 - Y = \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow (s^2-1)Y = -s + 1 + \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow Y = \frac{-s+1}{(s+1)(s-1)} + \frac{1}{(s-1)(s+1)^3}$$
$$Y = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s-1)(s+1)^3}$$

É correto: (0.8pt)

( ) $Y(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s-1)(s+1)^2}$

( ) $Y(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$

( ) $Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s-1)(s+1)^2}$

( ) $Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^3}$

(X) nenhuma das anteriores

É correto: (0.8pt)

( ) $y(t) = \frac{e^t}{4} - \frac{5e^{-t}}{4} - \frac{te^{-t}}{2}$

( ) $y(t) = \frac{e^t}{4} - \frac{e^{-t}}{4} - \frac{te^{-t}}{2}$

( ) $y(t) = \frac{e^t}{8} - \frac{e^{-t}}{8} - \frac{te^{-t}}{4} - \frac{t^2e^{-t}}{4}$

(X) $y(t) = \frac{e^t}{8} - \frac{9e^{-t}}{8} - \frac{te^{-t}}{4} - \frac{t^2e^{-t}}{4}$

( ) nenhuma das anteriores

parte (b): Decomposição em frações parciais:

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)^3} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+1)^3}$$
$$\Leftrightarrow 1 = A(s+1)^3 + B(s-1)(s+1)^2 + C(s-1)(s+1) + D(s-1) \quad \forall s$$
$$s = -1 \Rightarrow 1 = D(-1-1) \Rightarrow D = -1/2$$
$$s = 1 \Rightarrow 1 = A(1+1)^3 \Rightarrow A = 1/8$$
$$s = 0 \Rightarrow 1 = A(1) + B(-1) + C(-1) + D(-1) \Rightarrow -B - C = 1 - 1/8 - 1/2 = 3/8$$
$$s = -2 \Rightarrow 1 = A(-1) + B(-3) + C(3) + D(-3) \Rightarrow -3B + 3C = 1 + 1/8 - 3/2 = -3/8$$

e das duas últimas equações segue $B = -1/8, C = -1/4$.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s-1)(s+1)^3}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+1} + \frac{1/8}{s-1} + \frac{-1/8}{s+1} + \frac{-1/4}{(s+1)^2} + \frac{-1/2}{(s+1)^3}\right] =$$
$$= \frac{e^t}{8} - \frac{9e^{-t}}{8} - \frac{te^{-t}}{4} - \frac{t^2e^{-t}}{4}$$

• **Questão 4A(0.6pt)** O PVI impulsivo com condições iniciais nulas $\begin{cases} y' + 3y &= 3\delta(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ é equivalente a qual dos abaixo:

( ) $\begin{cases} y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(X) $\begin{cases} y' + 3y = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$

( ) $\begin{cases} y' + 3y = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases}$

( ) $\begin{cases} y' + 3y = 0 \\ y(0) = e^3 \end{cases}$

( ) nenhum dos anteriores

• **Questão 4B(0.6pt)** Sabendo que $\begin{cases} y' + 3y &= u(t) - u(t-1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ é correto:

(X) $y(t) = \frac{1-e^{-3t}}{3} - \left(\frac{1-e^{-3(t-1)}}{3}\right)u(t-1)$

( ) $y(t) = -\frac{e^{-3t}}{3} + \frac{e^{-3(t-1)}}{3}u(t-1)$

( ) $y(t) = \frac{1-e^{-3t}}{3} + \left(\frac{1-e^{-3(t-1)}}{3}\right)u(t-1)$

( ) $y(t) = 1 - e^{-3t} - (1 - e^{-3(t-1)})u(t-1)$

( ) nenhuma das anteriores está correta

Solução: (a) aplicando a Transformada de Laplace :: $sY - 0 + 3Y = 3(1) \Rightarrow Y = \frac{3}{s+3}$

Por outro lado, escrevendo $\begin{cases} y' + 3y = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ aplicamos a transformada de Laplace ::

$$sY - y_0 + 3Y = 0 \Rightarrow Y = \frac{y_0}{s+3}$$

e concluímos que os problemas são equivalentes somente se $y_0 = 3$.

(b) aplicando a Transformada de Laplace

$$sY - 0 + 3Y = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \Rightarrow Y = \frac{1}{s(s+3)} - \frac{e^{-s}}{s(s+3)}$$

mas observamos $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+3)}\right] = \int_0^t e^{-3\tau}d\tau = \left[\frac{e^{-3\tau}}{-3}\right]_0^t = \frac{1-e^{-3t}}{3}$ portanto

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+3)} - \frac{e^{-s}}{s(s+3)}\right] = \frac{1-e^{-3t}}{3} - \left(\frac{1-e^{-3(t-1)}}{3}\right)u(t-1)$$

• **Questão 5** (2.0 pontos) Sabendo $x(0) = 2$, $y(0) = 1$, resolva o seguinte sistema de EDOs
$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y \end{cases}$ para $t > 0$, usando transformadas de Laplace $X(s)$ e $Y(s)$.

Solução:

$$\begin{cases} sX - 2 = -2X + 3Y \\ sY - 1 = -3X + 2Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s+2)X = 2 + 3Y \\ (s-2)Y = 1 - 3X \end{cases}$$

e isolamos Y via

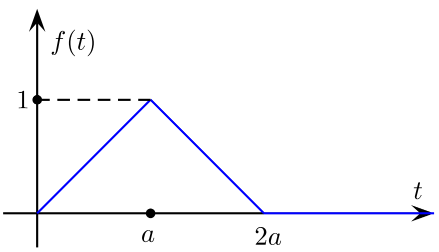
$$(s-2)Y = 1 - 3\left(\frac{2}{s+2} + \frac{3Y}{s+2}\right) \Rightarrow (s-2)Y = 1 - \frac{6}{s+2} - \frac{9Y}{s+2}$$
$$\frac{(s-2)(s+2)+9}{s+2}Y = \frac{s+2-6}{s+2} = \frac{s-4}{s+2} \Rightarrow Y = \frac{s-4}{s^2+5}$$

e segue $y(t) = \cos(\sqrt{5}\ t) - \dfrac{4}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}(\sqrt{5}\ t)$. Por outro lado,

$$(s+2)X = 2 + 3\left(\frac{1}{s-2} - \frac{3X}{s-2}\right) \Rightarrow (s+2)X = 2 + \frac{3}{s-2} - \frac{9X}{s-2}$$
$$\Rightarrow \frac{(s-2)(s+2)+9}{s-2}X = \frac{2s-4+3}{s-2} = \frac{2s-1}{s-2} \Rightarrow X = \frac{2s-1}{s^2+5}$$

e segue $x(t) = 2\cos(\sqrt{5}\ t) - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}(\sqrt{5}\ t)$.

• **Questão 6** Considere o seguinte problema de valor inicial:
$\begin{cases} y' + 2y = f(t) \quad ,t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ onde $f(t)$, que depende de um parâmetro positivo a, é determinada como abaixo:



6A.(1.0pt) Obtenha $F(s) = \mathcal{L}(f)$ para $a > 0$.
6B.(1.0pt) Obtenha a solução $y(t)$, usando a resposta de **6A**, para $a = 1$.

Solução: (a) f' é uma combinação de degraus $f'(t) = \dfrac{1}{a}u(t) - \dfrac{2}{a}u(t-a) + \dfrac{1}{a}u(t-2a)$ que implica (onde $f(0) = 0$)

$$\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0) = \frac{1}{a}\frac{1}{s} - \frac{2}{a}\frac{e^{-as}}{s} + \frac{1}{a}\frac{e^{-2as}}{s} = \frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{as} \Rightarrow F(s) = \frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{as^2}.$$

(b) fazendo $a = 1$, $F(s) = \dfrac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}$ implica

$$sY - 0 + 2Y = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} \Rightarrow (s+2)Y = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2(s+2)}$$

decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \Rightarrow 1 = As(s+2) + B(s+2) + Cs^2 \quad \forall s$$

e então $s = -2 \Rightarrow 1 = C(-2)^2 \Rightarrow C = 1/4$
$s = 0 \Rightarrow 1 = B(2) \Rightarrow B = 1/2$
$s = 1 \Rightarrow 1 = A(3) + B(3) + C \Rightarrow 3A = 1 - 3(1/2) - 1/4 = -3/4 \Rightarrow A = -1/4$ implica

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/4}{s} + \frac{1/2}{s^2} + \frac{1/4}{s+2}\right] = -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} = \frac{e^{-2t} + 2t - 1}{4}$$

e finalmente

$$y(t) = \frac{e^{-2t} + 2t - 1}{4} - 2\frac{e^{-2(t-1)} + 2(t-1) - 1}{4}u(t-1) + \frac{e^{-2(t-2)} + 2(t-2) - 1}{4}u(t-2) =$$
$$= \frac{e^{-2t} + 2t - 1}{4} - \frac{e^{-2(t-1)} + 2t - 3}{2}u(t-1) + \frac{e^{-2(t-2)} + 2t - 5}{4}u(t-2)$$

□