UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - 2022/2 - Turma C
Prova da área IIA

1 - 2	3	4	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ____________ **Turma:** C

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s),$ onde $\quad (f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})d\hat{s}$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, ...$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x}\operatorname{sen}(w\,x)\,dx = \dfrac{e^{\lambda x}(\lambda\operatorname{sen}(wx) - w\cos(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\dfrac{1}{s}$	1
2	$\dfrac{1}{s^2}$	t
3	$\dfrac{1}{s^n}, \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\dfrac{1}{\sqrt{s}},$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$
6	$\dfrac{1}{s^k}, \qquad (k > 0)$	$\dfrac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\dfrac{1}{(s-a)^n}, \qquad (n = 1, 2, 3...)$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\dfrac{1}{(s-a)^k}, \qquad (k > 0)$	$\dfrac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
12	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
13	$\dfrac{1}{s^2 + w^2}$	$\dfrac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)$
14	$\dfrac{s}{s^2 + w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\dfrac{1}{s^2 - a^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
16	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\dfrac{1}{(s-a)^2 + w^2}$	$\dfrac{1}{w}e^{at}\operatorname{sen}(wt)$
18	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\dfrac{1}{s(s^2 + w^2)}$	$\dfrac{1}{w^2}(1 - \cos(wt))$
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$	$\dfrac{1}{w^3}(wt - \operatorname{sen}(wt))$
21	$\dfrac{1}{(s^2 + w^2)^2}$	$\dfrac{1}{2w^3}(\operatorname{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
22	$\dfrac{s}{(s^2 + w^2)^2}$	$\dfrac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt)$
23	$\dfrac{s^2}{(s^2 + w^2)^2}$	$\dfrac{1}{2w}(\operatorname{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
24	$\dfrac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)},$ $(a^2 \neq b^2)$	$\dfrac{1}{b^2 - a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\dfrac{1}{(s^4 + 4a^4)}$	$\dfrac{1}{4a^3}[\operatorname{sen}(at)\cosh(at) -$ $- \cos(at)\operatorname{senh}(at)]$
26	$\dfrac{s}{(s^4 + 4a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at))$
27	$\dfrac{1}{(s^4 - a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}(at) - \operatorname{sen}(at))$
28	$\dfrac{s}{(s^4 - a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
30	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\dfrac{a-b}{2}t\right)$
31	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\dfrac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1 + 2at)$
33	$\dfrac{1}{(s^2 - a^2)^k}, \qquad (k > 0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\dfrac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \qquad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \qquad (k > 0)$	$\dfrac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\dfrac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \qquad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\dfrac{s-a}{s-b}\right)$	$\dfrac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\dfrac{s^2 + w^2}{s^2}\right)$	$\dfrac{2}{t}(1 - \cos(wt))$
41	$\ln\left(\dfrac{s^2 - a^2}{s^2}\right)$	$\dfrac{2}{t}(1 - \cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\dfrac{w}{s}\right)$	$\dfrac{1}{t}\operatorname{sen}(wt)$
43	$\dfrac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\operatorname{Si}(t)$
44	$\dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t + 2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\dfrac{1}{as^2}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\dfrac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t + 2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\dfrac{w}{(s^2 + w^2)\left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(wt), & 0 < t < \dfrac{\pi}{w} \\ 0, & \dfrac{\pi}{w} < t < \dfrac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \dfrac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\dfrac{w}{s^2 + w^2}\coth\left(\dfrac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert\operatorname{sen}(wt)\rvert$
48	$\dfrac{1}{as^2} - \dfrac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t) = \dfrac{t}{a}, \qquad 0 < t < a$ $f(t) = f(t - a), \quad t > a$

• **Questão 1** (0.5 cada item) Considere a transformada de Laplace das funções $f(t)$ e $g(t)$ dadas nas expressões abaixo:

$$F(s) = \frac{5s}{(s^2+4)(s-1)}$$

e

$$G(s) = \frac{5se^{-2s}}{(s^2+4)(s-1)}$$

Também, considere $h(t) = f(t) + g(t)$.

Na primeira coluna, marque a alternativa que apresenta uma expressão para $F(s)$ separada da forma $F(s) = \dfrac{A+Bs}{s^2+4} + \dfrac{C}{s-1}$. Na segunda coluna, marque a alternativa que apresenta uma expressão para $f(t)$. Na terceira, marque a alternativa que apresenta uma expressão para $h(t)$. E, na quarta, marque a alternativa que apresenta a transformada de Laplace de $h'(t)$.

$F(s)$:

( ) $F(s) = \dfrac{3-2s}{s^2+4} + \dfrac{1}{s-1}$.

( ) $F(s) = \dfrac{2+3s}{5(s^2+4)} + \dfrac{1}{5(s-1)}$.

( ) $F(s) = \dfrac{4-s}{5(s^2+4)} + \dfrac{1}{5(s-1)}$.

( ) $F(s) = \dfrac{2+3s}{s^2+4} + \dfrac{1}{s-1}$.

( ) $F(s) = \dfrac{4-s}{s^2+4} + \dfrac{1}{s-1}$.

$f(t)$:

( ) $f(t) = \dfrac{2}{5}\operatorname{sen}(2t) - \dfrac{1}{5}\cos(2t) + \dfrac{1}{5}e^t$.

( ) $f(t) = 10\operatorname{sen}(2t) + 5\cos(2t) + 5e^t$.

( ) $f(t) = 2\operatorname{sen}(2t) - \cos(2t) + e^t$.

( ) $f(t) = \operatorname{sen}(2t) + 3\cos(2t) + e^t$.

( ) $f(t) = 4\operatorname{sen}(2t) - \cos(2t) + e^t$.

$h(t)$:

( ) $h(t) = 2\operatorname{sen}(2t) - \cos(2t) + e^t + (2\operatorname{sen}(2t) - \cos(2t) + e^t)u(t-2)$.

( ) $h(t) = 2\operatorname{sen}(2t) - \cos(2t) + e^t + (2\operatorname{sen}(2(t-2)) - \cos(2(t-2)) + e^{(t-2)})u(t-2)$.

( ) $h(t) = \operatorname{sen}(2t) + 3\cos(2t) + e^t + (\operatorname{sen}(2(t-2)) + 3\cos(2(t-2)) + e^{(t-2)})u(t-2)$.

( ) $h(t) = \operatorname{sen}(2t) + 3\cos(2t) + e^t + (\operatorname{sen}(2t) + 3\cos(2t) + e^t)u(t-2)$.

( ) $h(t) = \dfrac{2\operatorname{sen}(2t)}{5} - \dfrac{\cos(2t)}{5} + \dfrac{e^t}{5} + \dfrac{u(t-2)}{5}(2\operatorname{sen}(2(t-2)) - \cos(2(t-2)) + e^{(t-2)})$.

$\mathcal{L}\{h'(t)\}$:

( ) $\mathcal{L}\{h'(t)\} = \dfrac{5s^2+5e^{-2s}}{(s^2+4)(s-1)}$

( ) $\mathcal{L}\{h'(t)\} = \dfrac{5+5e^{-2s}}{s(s^2+4)(s-1)}$

( ) $\mathcal{L}\{h'(t)\} = \dfrac{5+5e^{-2s}}{(s^2+4)(s-1)}$

( ) $\mathcal{L}\{h'(t)\} = \dfrac{5s^2+5s^2e^{-2s}}{(s^2+4)(s-1)}$

( ) $\mathcal{L}\{h'(t)\} = \dfrac{5s+5se^{-2s}}{(s^2+4)(s-1)}$

• **Questão 2** (0.5 cada item) Considere a transformada de Laplace da função $f(t)$ dada na expressão abaixo:

$$F(s) = \frac{s^2+1}{105+71s+15s^2+s^3}$$

Observe que o objetivo aqui não é calcular a transformada inversa.

Na primeira coluna, marque a alternativa que apresenta uma expressão para a transformada de $g(t) := \int_0^t f(\tau)d\tau$. Na segunda coluna, marque a alternativa que apresenta o limite $\lim_{t\to 0^+} f(t)$. Na terceira, marque a alternativa que apresenta uma expressão para $\mathcal{L}\{e^{3t}f(t)\}$. E, na quarta, marque a alternativa que apresenta a transformada de Laplace de $tf(t)$.

$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}$:

( ) $\dfrac{s^2+1}{105s+71s^2+15s^3+s^4}$

( ) $\dfrac{s^3+s}{105+71s+15s^2+s^3}$

( ) $\dfrac{2s}{71+30s+3s^2}$

( ) $\displaystyle\int_s^\infty \left(\frac{v^2+1}{105+71v+15v^2+v^3}\right) dv$

( ) $\dfrac{s^2+1}{105+71s+15s^2+s^3}$

$\lim_{t\to 0} f(t)$:

( ) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0.$

( ) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \dfrac{1}{105}.$

( ) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \dfrac{1}{71}.$

( ) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \dfrac{1}{15}.$

( ) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 1.$

$\mathcal{L}\{e^{3t}f(t)\}$:

( ) $(s-3)\dfrac{s^2+1}{105+71s+15s^2+s^3}.$

( ) $e^{-3s}\dfrac{s^2+1}{105+71s+15s^2+s^3}.$

( ) $u(s-3)\dfrac{s^2+1}{105+71s+15s^2+s^3}.$

( ) $\dfrac{(s+3)^2+1}{105+71(s+3)+15(s+3)^2+(s+3)^3}.$

( ) $\dfrac{(s-3)^2+1}{105+71(s-3)+15(s-3)^2+(s-3)^3}.$

$\mathcal{L}\{tf(t)\}$:

( ) $\dfrac{(-71+180s+68s^2-s^4)}{(105+71s+15s^2+s^3)}.$

( ) $-\dfrac{1}{(105+71s+15s^2+s^3)^2}.$

( ) $-\dfrac{(-71+180s+68s^2-s^4)}{(105+71s+15s^2+s^3)^2}.$

( ) $-\dfrac{s^2+1}{105+71s+15s^2+s^3}.$

( ) $-\dfrac{2s}{71+15s+3s^2}.$

• **Questão 3** (3.0 pontos) Um sistema mecânico com massa m, coeficiente de amortecimento c e constante de mola k é representado pela seguinte equação diferencial:

$$2y''(t) + cy'(t) + 50y(t) = f(t)$$

onde $f(t)$ é uma força externa aplicada ao sistema. Considere que $f(t) = 1$.

a) (1.0 ponto) Encontre os intervalos para o amortecimento c para cada um dos três regimes de amortecimento (superamortecido, subamortecido e criticamente amortecido). Escreva a forma geral da solução e um gráfico qualitativo para cada regime descrito.

b) (0.5) Explique o caso $c = 0$.

c) (0.5) Encontre $Y(s)$ para o caso criticamente amortecido com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

d) (0.5) Encontre $y(t)$ para o caso específico dado.

e) (0.5) Trace o gráfico de $y(t)$ para o caso específico dado, indicando eixos e valores notáveis.

• **Questão 4** (3.0 pontos) A temperatura em um sistema de refrigeração evolui no tempo conforme o seguinte modelo simplificado:

$$\frac{du(t)}{dt} = -\lambda(u(t) - u_{amb}) + q(t) \tag{1}$$

onde $u(t)$ representa a temperatura medida, u_{amb} é temperatura ambiente, considerada constante, $q(t)$ é a potência do sistema (negativa) e λ é uma constante relacionada às trocas de calor. Considere $u(0) = 20$, $u_{amb} = 20$ e $\lambda = 2$.

A temperatura é regulada por um sistema de controle automático que ajusta a potência $q(t)$. O sistema de controle automático reage conforme a seguinte equação:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \eta(u_a - u(t)). \tag{2}$$

onde u_a é a temperatura de ajuste, η é uma constante positiva e $q(0) = 0$. Calcule o valor de η para que o sistema resultante do acoplamente entre o modelo do sistema de refrigeração e o sistema de controle automático seja criticamente amortecido.

Usando a técnicas das transformadas de Laplace, faça o que se pede:

a) (1.0) Encontre uma expressão geral para $U(s)$ e calcule η tal que o sistema acoplado seja criticamente amortecido.

b) (1.0) Resolva o problema acoplado para $u(t)$ usando a constante η calculada no item a) e considerando $u_a = 0$.

c) (1.0) Resolva o problema acoplado para $q(t)$ usando a constante η calculada no item a) e considerando $u_a = 0$.