UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - 2022/2 - Turma C
Prova da área IIA

1 - 2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________ **Turma:** C

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})d\hat{s}$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, ...$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}x^n e^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x}\operatorname{sen}(w x)\,dx = \dfrac{e^{\lambda x}(\lambda\operatorname{sen}(wx) - w\cos(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \qquad (n = 1, 2, 3...)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2+w^2}$	$\frac{1}{w}\,\mathrm{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\,\mathrm{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{1}{w} e^{at}\,\mathrm{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt - \mathrm{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\mathrm{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{t}{2w}\,\mathrm{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\mathrm{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)},$ $(a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\mathrm{sen}(at)\cosh(at) -$ $- \cos(at)\,\mathrm{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\,\mathrm{sen}(at)\,\mathrm{senh}(at))$
27	$\frac{1}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^3}(\mathrm{senh}(at) - \mathrm{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at}(1+2at)$
33	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s} e^{-\frac{k}{s}}, \qquad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \qquad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \qquad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\,\mathrm{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\mathrm{Si}\,(t)$
44	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \mathrm{sen}(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert \mathrm{sen}(wt) \rvert$
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t) = \frac{t}{a}, \qquad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

• **Questão 1** (0.5 cada item) Considere a transformada de Laplace das funções $f(t)$ e $g(t)$ dadas nas expressões abaixo:

$$F(s) = \frac{5s}{(s^2+4)(s-1)}$$

e

$$G(s) = \frac{5se^{-2s}}{(s^2+4)(s-1)}$$

Também, considere $h(t) = f(t) + g(t)$.

Na primeira coluna, marque a alternativa que apresenta uma expressão para $F(s)$ separada da forma $F(s) = \dfrac{A+Bs}{s^2+4} + \dfrac{C}{s-1}$. Na segunda coluna, marque a alternativa que apresenta uma expressão para $f(t)$. Na terceira, marque a alternativa que apresenta uma expressão para $h(t)$. E, na quarta, marque a alternativa que apresenta a transformada de Laplace de $h'(t)$.

$F(s)$:

( ) $F(s) = \dfrac{3-2s}{s^2+4} + \dfrac{1}{s-1}$.

( ) $F(s) = \dfrac{2+3s}{5(s^2+4)} + \dfrac{1}{5(s-1)}$.

( ) $F(s) = \dfrac{4-s}{5(s^2+4)} + \dfrac{1}{5(s-1)}$.

( ) $F(s) = \dfrac{2+3s}{s^2+4} + \dfrac{1}{s-1}$.

(X) $F(s) = \dfrac{4-s}{s^2+4} + \dfrac{1}{s-1}$.

$f(t)$:

( ) $f(t) = \frac{2}{5}\operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{5}\cos(2t) + \frac{1}{5}e^t$.

( ) $f(t) = 10\operatorname{sen}(2t) + 5\cos(2t) + 5e^t$.

(X) $f(t) = 2\operatorname{sen}(2t) - \cos(2t) + e^t$.

( ) $f(t) = \operatorname{sen}(2t) + 3\cos(2t) + e^t$.

( ) $f(t) = 4\operatorname{sen}(2t) - \cos(2t) + e^t$.

$h(t)$:

( ) $h(t) = 2\operatorname{sen}(2t) - \cos(2t) + e^t + (2\operatorname{sen}(2t) - \cos(2t) + e^t)u(t-2)$.

(X) $h(t) = 2\operatorname{sen}(2t) - \cos(2t) + e^t + (2\operatorname{sen}(2(t-2)) - \cos(2(t-2)) + e^{(t-2)})u(t-2)$.

( ) $h(t) = \operatorname{sen}(2t) + 3\cos(2t) + e^t + (\operatorname{sen}(2(t-2)) + 3\cos(2(t-2)) + e^{(t-2)})u(t-2)$.

( ) $h(t) = \operatorname{sen}(2t) + 3\cos(2t) + e^t + (\operatorname{sen}(2t) + 3\cos(2t) + e^t)u(t-2)$.

( ) $h(t) = \dfrac{2\operatorname{sen}(2t)}{5} - \dfrac{\cos(2t)}{5} + \dfrac{e^t}{5} + \dfrac{u(t-2)}{5}(2\operatorname{sen}(2(t-2)) - \cos(2(t-2)) + e^{(t-2)})$.

$\mathcal{L}\{h'(t)\}$:

( ) $\mathcal{L}\{h'(t)\} = \dfrac{5s^2+5e^{-2s}}{(s^2+4)(s-1)}$

( ) $\mathcal{L}\{h'(t)\} = \dfrac{5+5e^{-2s}}{s(s^2+4)(s-1)}$

( ) $\mathcal{L}\{h'(t)\} = \dfrac{5+5e^{-2s}}{(s^2+4)(s-1)}$

(X) $\mathcal{L}\{h'(t)\} = \dfrac{5s^2+5s^2e^{-2s}}{(s^2+4)(s-1)}$

( ) $\mathcal{L}\{h'(t)\} = \dfrac{5s+5se^{-2s}}{(s^2+4)(s-1)}$

Solução:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{5s}{(s^2+4)(s-1)} \\ &= \frac{A+Bs}{s^2+4} + \frac{C}{s-1} \\ &= \frac{(A+Bs)(s-1) + C(s^2+4)}{(s^2+4)(s-1)} \\ &= \frac{(B+C)s^2 + (A-B)s + (4C-A)}{(s^2+4)(s-1)}. \end{aligned}$$

Assim, $B+C=0$, $A-B=5$ e $4C-A=0$. Como $C=-B$, temos $A=4C=-4B$ e $A-B=5$ leva em $-5B=5$, ou seja, $B=-1$. Logo, $A=4$ e $C=1$. Portanto,

$$F(s) = \frac{4-s}{s^2+4} + \frac{1}{s-1}.$$

Fazemos a transformada inversa usando itens 7, 13 e 14 da tabela na expressão

$$F(s) = \frac{4}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s-1}.$$

Assim,

$$f(t) = 2\,\mathrm{sen}(2t) - \cos(2t) + e^t.$$

Pelo Propriedade da translação em t, sabemos que

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) + u(t-2)f(t-2) \\ &= 2\,\mathrm{sen}(2t) - \cos(2t) + e^t + (2\,\mathrm{sen}(2(t-2)) - \cos(2(t-2)) + e^{(t-2)})u(t-2). \end{aligned}$$

Para finalizar a questão, usamos a Propriedade da transformada da derivada

$$\mathcal{L}\{h'(t)\} = s\mathcal{L}\{h(t)\} - h(0).$$

Como $h(0) = 0$ e $\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$, então

$$\mathcal{L}\{h'(t)\} = s\left(\mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}\right) = \frac{5s^2 + 5s^2e^{-2s}}{(s^2+4)(s-1)}.$$

• **Questão 2** (0.5 cada item) Considere a transformada de Laplace da função $f(t)$ dada na expressão abaixo:

$$F(s) = \frac{s^2+1}{105 + 71s + 15s^2 + s^3}$$

Observe que o objetivo aqui não é calcular a transformada inversa.

Na primeira coluna, marque a alternativa que apresenta uma expressão para a transformada de $g(t) := \int_0^t f(\tau)d\tau$. Na segunda coluna, marque a alternativa que apresenta o limite $\lim_{t\to 0^+} f(t)$. Na terceira, marque a alternativa que apresenta uma expressão para $\mathcal{L}\{e^{3t}f(t)\}$. E, na quarta, marque a alternativa que apresenta a transformada de Laplace de $tf(t)$.

$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}$:

(X) $\frac{s^2+1}{105s + 71s^2 + 15s^3 + s^4}$

( ) $\frac{s^3+s}{105 + 71s + 15s^2 + s^3}$

( ) $\frac{2s}{71 + 30s + 3s^2}$

( ) $\int_s^\infty \left(\frac{v^2+1}{105 + 71v + 15v^2 + v^3}\right) dv$

( ) $\frac{s^2+1}{105 + 71s + 15s^2 + s^3}$

$\lim_{t\to 0} f(t)$:

( ) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0.$

( ) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \frac{1}{105}.$

( ) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \frac{1}{71}.$

( ) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \frac{1}{15}.$

(X) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 1.$

$\mathcal{L}\{e^{3t}f(t)\}$:

( ) $(s-3)\frac{s^2+1}{105 + 71s + 15s^2 + s^3}.$

( ) $e^{-3s}\frac{s^2+1}{105 + 71s + 15s^2 + s^3}.$

( ) $u(s-3)\frac{s^2+1}{105 + 71s + 15s^2 + s^3}.$

( ) $\frac{(s+3)^2+1}{105 + 71(s+3) + 15(s+3)^2 + (s+3)^3}.$

(X) $\frac{(s-3)^2+1}{105 + 71(s-3) + 15(s-3)^2 + (s-3)^3}.$

$\mathcal{L}\{tf(t)\}$:

( ) $\frac{(-71 + 180s + 68s^2 - s^4)}{(105 + 71s + 15s^2 + s^3)}.$

( ) $-\frac{1}{(105 + 71s + 15s^2 + s^3)^2}.$

(X) $-\frac{(-71 + 180s + 68s^2 - s^4)}{(105 + 71s + 15s^2 + s^3)^2}.$

( ) $-\frac{s^2+1}{105 + 71s + 15s^2 + s^3}.$

( ) $-\frac{2s}{71 + 15s + 3s^2}.$

Solução: Pela propriedade da transformada da integral, temos

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} = \frac{s^2+1}{s(105+71s+15s^2+s^3)}.$$

Supondo que o limite $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ existe, a propriedade do valor inicial nos dá

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3+s}{105+71s+15s^2+s^3} = 1.$$

A propriedade da translação em s produz o resultado

$$\mathcal{L}\{e^{3t}f(t)\} = F(s-3) = \frac{(s-3)^2+1}{105+71(s-3)+15(s-3)^2+(s-3)^3}.$$

A propriedade da derivada da transformada é usada para finalizar a questão:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds} = -\frac{(-71+180s+68s^2-s^4)}{(105+71s+15s^2+s^3)^2}.$$

• **Questão 3** (3.0 pontos) Um sistema mecânico com massa m, coeficiente de amortecimento c e constante de mola k é representado pela seguinte equação diferencial:

$$2y''(t) + cy'(t) + 50y(t) = f(t)$$

onde $f(t)$ é uma força externa aplicada ao sistema. Considere que $f(t) = 1$.

a) (1.0 ponto) Encontre os intervalos para o amortecimento c para cada um dos três regimes de amortecimento (superamortecido, subamortecido e criticamente amortecido). Escreva a forma geral da solução e um gráfico qualitativo para cada regime descrito.

b) (0.5) Explique o caso $c = 0$.

c) (0.5) Encontre $Y(s)$ para o caso criticamente amortecido com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

d) (0.5) Encontre $y(t)$ para o caso específico dado.

e) (0.5) Trace o gráfico de $y(t)$ para o caso específico dado, indicando eixos e valores notáveis.

Solução item a)
Tomando a transformada de Laplace, temos:

$$2\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + c\left[sY(s) - y(0)\right] + 50Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Rearrajando os termos, temos:

$$\left(2s^2+cs+50\right)Y(s) = (2s+c)y(0) + 2y'(0) + \frac{1}{s}.$$

Isolando $Y(s)$, encontramos a forma geral:

$$Y(s) = \frac{(2s+c)sy(0) + 2sy'(0) + 1}{s\left(2s^2+cs+50\right)}.$$

Para que o sistema seja amortecido, o coeficiente de amortecimento c deve ser positivo. Podemos determinar o regime de amortecimento pelo discrimimante dada por:

$$\Delta = c^2 - 400.$$

Caso superamortecido: O caso superamortecido acontece quando $\Delta > 0$, isto é, $c > 20$. Neste caso as raízes do polinômio quadrático são reais e diferentes e a solução $Y(s)$ pode ser decomposta em frações parciais como:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-a} + \frac{C}{s-b}, \quad a \neq b.$$

onde $2s^2 + cs + 50 = 2(s-a)(s-b)$ e as raízes a e b são dadas por:

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2-400}}{2}.$$

Obtemos:

$$y(t) = A + Be^{at} + Ce^{bt}.$$

Caso criticamente amortecido: O caso criticamente amortecido acontece quando $\Delta = 0$, isto é, $c = 20$. Neste caso o polinômio quadrático tem uma raiz de multiplicidade 2 e pode ser decomposto como:

$$2s^2 + cs + 50 = 2s^2 + 20s + 50 = 2(s+5)^2.$$

A solução $Y(s)$ pode ser decomposta em frações parciais como:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} + \frac{C}{(s+5)^2}$$

Obtemos:

$$y(t) = A + Be^{-5t} + Cte^{-5t}$$

Caso subamortecido: O caso subamortecido acontece quando $\Delta < 0$, isto é, $0 < c < 20$. Neste caso as raízes do polinômio quadrático forma um par complexo conjugado da forma:

$$2s^2 + cs + 50 = 2\left(s^2 + \frac{c}{2}s + 25\right) = 2\left(\left(s + \frac{c}{4}\right)^2 + s + 25 - \frac{c^2}{4}\right) = 2\left((s+a)^2 + w_0^2\right).$$

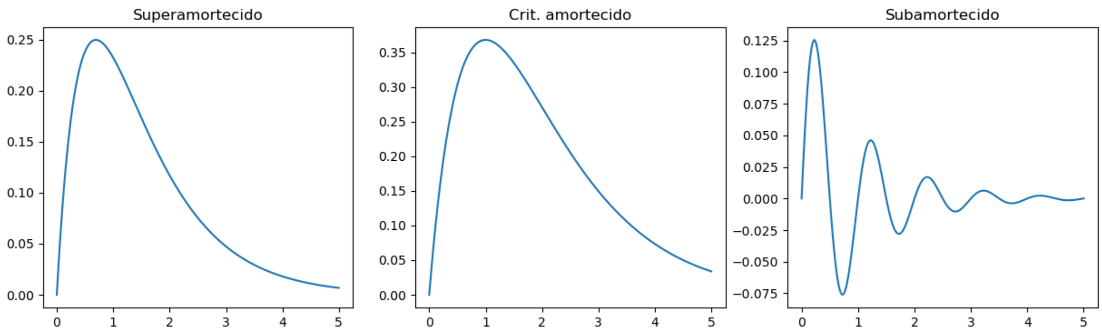
Aqui $a = \frac{c}{4}$ e $w_0 = \sqrt{25 - \frac{c^2}{4}}$.

A solução $Y(s)$ pode ser decomposta em frações parciais como:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s+a)^2 + w_0^2} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B(s+a)}{(s+a)^2 + w_0^2} + \frac{C - aB}{(s+a)^2 + w_0^2} \end{aligned}$$

Obtemos:

$$y(t) = A + B\cos(w_0 t)e^{-at} + \frac{C - aB}{w_0}\operatorname{sen}(w_0 t)e^{-at}.$$



Solução item b) Quando $c = 0$, o problema se reduz a um oscilador harmônico simples sem amortecimento, isto é,

$$2y''(t) + 50y(t) = 1.$$

Nesse caso, a transformada de Laplace se reduz a

$$Y(s) = \frac{2s^2 y(0) + 2sy'(0) + 1}{s\left(2s^2 + cs + 50\right)}.$$

Separamos o termo acima em frações parciais da forma

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s^2 + 25)}$$

e obtemos uma solução do problema da forma:

$$y(t) = A + B\cos(5t) + \frac{C}{5}\operatorname{sen}(5t)$$

Solução item c) O caso criticamente amortecido acontece quando $\Delta = 0$, isto é, $c = 20$. A transformada de Laplace assume a forma:

$$Y(s) = \frac{2s+1}{2s\,(s^2+10s+25)} = \frac{2s+1}{2s(s+5)^2}$$

Solução item d) Separamos em frações parciais da forma

$$Y(s) = \frac{s+1/2}{s(s+5)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} + \frac{C}{(s+5)^2} = \frac{A(s+5)^2 + Bs(s+5) + Cs}{s(s+5)^2} = \frac{(A+B)s^2 + (10A+5B+C)s + 25A}{s(s+5)^2},$$

e encontramos um sistema da forma

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 10A+5B+C=1 \\ 25A=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, $A = \dfrac{1}{50}$, $B = -\dfrac{1}{50}$ e $C = \dfrac{9}{10}$.

Assim, aplicando os itens 7 e 8 da tabela na expressão

$$Y(s) = \frac{1}{50s} - \frac{1}{50(s+5)} + \frac{9}{10(s+5)^2}$$

temos a solução:

$$y(t) = \frac{1}{50} - \frac{e^{-5t}}{50} + \frac{9te^{-5t}}{10}.$$

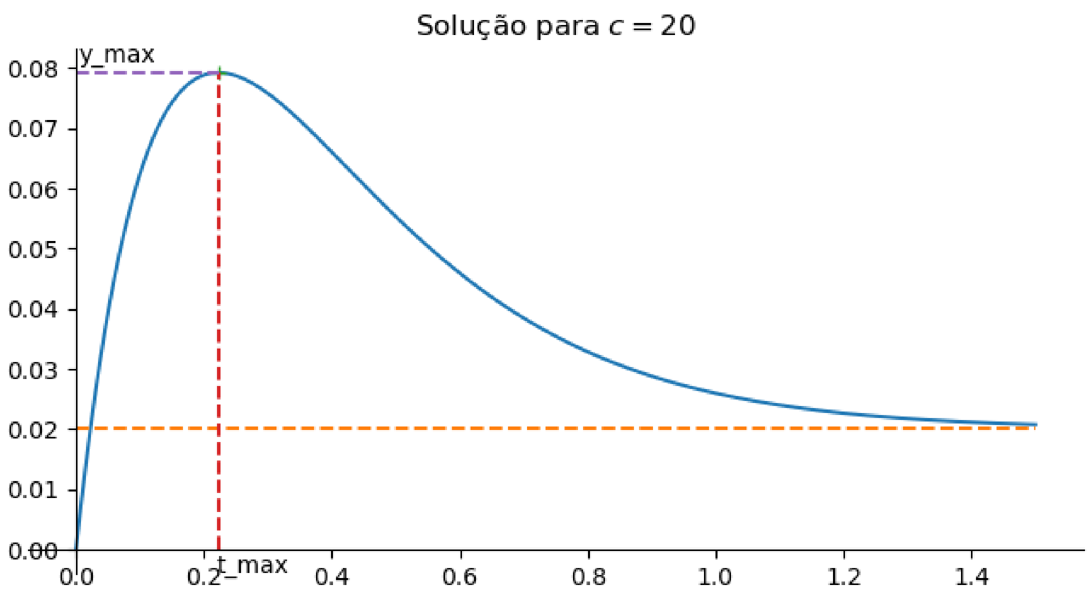
Solução item e)

Calcumos o ponto de máximo estudando os pontos críticos $y' = 0$.

$$y'(t) = \frac{5e^{-5t}}{50} - \frac{45te^{-5t}}{10} + \frac{9e^{-5t}}{10} = e^{-5t}\left(\frac{1}{10} - \frac{45t}{10} + \frac{9}{10}\right) = e^{-5t}\left(-\frac{45t}{10} + 1\right) = 0,$$

o que leva em $t = \dfrac{10}{45}$. Assim,

$$y\left(\frac{10}{45}\right) = \frac{1}{50} - \frac{e^{-\frac{10}{9}}}{50} + \frac{e^{-\frac{10}{9}}}{5} \approx 0.0792547378.$$



• **Questão 4** (3.0 pontos) A temperatura em um sistema de refrigeração evolui no tempo conforme o seguinte modelo simplificado:

$$\frac{du(t)}{dt} = -\lambda(u(t) - u_{amb}) + q(t) \tag{1}$$

onde $u(t)$ representa a temperatura medida, u_{amb} é temperatura ambiente, considerada constante, $q(t)$ é a potência do sistema (negativa) e λ é uma constante relacionada às trocas de calor. Considere $u(0) = 20$, $u_{amb} = 20$ e $\lambda = 2$.

A temperatura é regulada por um sistema de controle automático que ajusta a potência $q(t)$. O sistema de controle automático reage conforme a seguinte equação:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \eta(u_a - u(t)). \tag{2}$$

onde u_a é a temperatura de ajuste, η é uma constante positiva e $q(0) = 0$. Calcule o valor de η para que o sistema resultante do acoplamente entre o modelo do sistema de refrigeração e o sistema de controle automático seja criticamente amortecido.

Usando a técnicas das transformadas de Laplace, faça o que se pede:

a) (1.0) Encontre uma expressão geral para $U(s)$ e calcule η tal que o sistema acoplado seja criticamente amortecido.

b) (1.0) Resolva o problema acoplado para $u(t)$ usando a constante η calculada no item a) e considerando $u_a = 0$.

c) (1.0) Resolva o problema acoplado para $q(t)$ usando a constante η calculada no item a) e considerando $u_a = 0$.

Solução do item a): Tomando a transformada de Laplace das equações, temos:

$$sU(s) - u(0) = -\lambda\left(U(s) - \frac{u_{amb}}{s}\right) + Q(s)$$

e

$$sQ(s) - q(0) = \eta\left(\frac{u_a}{s} - U(s)\right).$$

Multiplicamos a primeira equação por s e substituimos $sQ(s) = \eta\left(\frac{u_a}{s} - U(s)\right) + q(0)$

$$s^2U(s) - su(0) = -\lambda\left(sU(s) - u_{amb}\right) + \eta\left(\frac{u_a}{s} - U(s)\right) + q(0)$$

Rearranjando os temos, encontramos:

$$\left(s^2 + \lambda s + \eta\right)U(s) = \lambda u_{amb} + \frac{\eta u_a}{s} + q(0) + su(0)$$

Encontramos a seguinte expressão geral para $U(s)$:

$$U(s) = \frac{\eta u_a + (\lambda u_{amb} + q(0))s + u(0)s^2}{s\left(s^2 + \lambda s + \eta\right)}$$

Para que o sistema seja criticamente amortecido η deve satisfazer $\Delta := \lambda^2 - 4\eta = 0$, isto é, $\eta = 1$ quando $\lambda = 2$. Subsituindo os valores dados temos:

$$U(s) = \frac{u_a + 40s + 20s^2}{s\left(s^2 + 2s + 1\right)} = \frac{u_a + 40s + 20s^2}{s\left(s+1\right)^2}$$

Solução do item b): Subsituimos $u_a = 0$ para obter:

$$\begin{aligned} U(s) &= 20\left(\frac{(2+s)}{(s+1)^2}\right) \\ &= 20\left(\frac{(1+s)}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}\right) \\ &= 20\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right) \end{aligned}$$

Assim:

$$u(t) = 20\left(e^{-t} + te^{-t}\right) = 20\left(1+t\right)e^{-t}$$

Solução do item c): O teorema fundamental do cálculo nos dá

$$q(t) = q(0) + \int_0^t q'(\tau)d\tau.$$

Da equação do sistema de controle, temos:

$$\begin{aligned}
q(t) &= q(0) + \eta \int_0^t (u_a - u(\tau)))d\tau \\
&= -\int_0^t u(\tau)d\tau \\
&= -20 \int_0^t (1+\tau)\, e^{-\tau} d\tau \\
&= -20 \left[-(1+\tau)e^{-\tau}\Big|_0^t - \int_0^t (-e^{-\tau})d\tau \right] \\
&= -20 \left[-(1+t)e^{-t} + 1 - e^{-\tau}\Big|_0^t \right] \\
&= -20 \left[-(1+t)e^{-t} + 1 - e^{-t} + 1 \right] \\
&= -40 + 20(2+t)e^{t}.
\end{aligned}$$