UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - 2023/1 - Turma A
Prova da área IIA

1 - 4	5	6	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ____________ **Turma:** D

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\text{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\text{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$, $\binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\text{sen}(x+y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})d\hat{s}$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\text{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, ...$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\text{Si}\,(t) = \int_0^t \dfrac{\text{sen}(x)}{x}dx$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\,\text{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\,\text{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\text{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x}\,\text{sen}(wx)\,dx = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda\,\text{sen}(wx) - w\cos(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\dfrac{1}{s}$	1
2	$\dfrac{1}{s^2}$	t
3	$\dfrac{1}{s^n},\qquad (n=1,2,3,...)$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\dfrac{1}{\sqrt{s}},$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$
6	$\dfrac{1}{s^k},\qquad (k>0)$	$\dfrac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\dfrac{1}{(s-a)^n},\qquad (n=1,2,3...)$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\dfrac{1}{(s-a)^k},\qquad (k>0)$	$\dfrac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)},\qquad (a\neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$
12	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)},\qquad (a\neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}\left(ae^{at}-be^{bt}\right)$
13	$\dfrac{1}{s^2+w^2}$	$\dfrac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)$
14	$\dfrac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
16	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\dfrac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\dfrac{1}{w}e^{at}\operatorname{sen}(wt)$
18	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\dfrac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\dfrac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\dfrac{1}{w^3}(wt-\operatorname{sen}(wt))$
21	$\dfrac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\dfrac{1}{2w^3}(\operatorname{sen}(wt)-wt\cos(wt))$
22	$\dfrac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\dfrac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt)$
23	$\dfrac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\dfrac{1}{2w}(\operatorname{sen}(wt)+wt\cos(wt))$
24	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)},\qquad (a^2\neq b^2)$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos(at)-\cos(bt))$
25	$\dfrac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\dfrac{1}{4a^3}[\operatorname{sen}(at)\cosh(at)- -\cos(at)\operatorname{senh}(at)]$
26	$\dfrac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at))$
27	$\dfrac{1}{(s^4-a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}(at)-\operatorname{sen}(at))$
28	$\dfrac{s}{(s^4-a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^2}(\cosh(at)-\cos(at))$
29	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$
30	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}}I_0\left(\dfrac{a-b}{2}t\right)$
31	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\dfrac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
33	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^k},\qquad (k>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\dfrac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}},\qquad (k>0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}},\qquad (k>0)$	$\dfrac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\dfrac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t)-\gamma,\qquad (\gamma\approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\dfrac{s-a}{s-b}\right)$	$\dfrac{1}{t}\left(e^{bt}-e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\dfrac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\dfrac{2}{t}(1-\cos(wt))$
41	$\ln\left(\dfrac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\dfrac{2}{t}(1-\cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\dfrac{w}{s}\right)$	$\dfrac{1}{t}\operatorname{sen}(wt)$
43	$\dfrac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\operatorname{Si}(t)$
44	$\dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a\\ -1, & a<t<2a\end{cases}$ $f(t+2a)=f(t),\quad t>0$
45	$\dfrac{1}{as^2}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{a}, & 0<t<a\\ -\dfrac{t}{a}+2, & a<t<2a\end{cases}$ $f(t+2a)=f(t),\quad t>0$
46	$\dfrac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen}(wt), & 0<t<\dfrac{\pi}{w}\\ 0, & \dfrac{\pi}{w}<t<\dfrac{2\pi}{w}\end{cases}$ $f\left(t+\dfrac{2\pi}{w}\right)=f(t),\quad t>0$
47	$\dfrac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\dfrac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t)=\lvert\operatorname{sen}(wt)\rvert$
48	$\dfrac{1}{as^2}-\dfrac{e^{-as}}{s\,(1-e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t)=\dfrac{t}{a},\qquad 0<t<a$ $f(t)=f(t-a),\quad t>a$

• **Questão 1** (0.5 cada item) Considere as funções $f(t)$ e $g(t)$ dadas por:

$$f(t) = u(t) + (t-1)u(t-1) + 2u(t-2) \quad \text{e} \quad g(t) = e^{f(t)}$$

Marque as alternativas que apresentam uma expressão para $g(3)$, $\int_0^3 g(t)dt$ e $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$.

$g(3)$:

( ) e

( ) e^2

( ) e^3

( ) e^4

(X) e^5

$\int_0^3 g(t)dt$:

(X) $e^5 - e^4 + e^2$

( ) $e^5 + e^4 - e^2$

( ) $e^3 - e^2 + e$

( ) $e^3 - e^2$

( ) 0

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$:

( ) $F(s) = \dfrac{s + e^{-s} + 2se^{-2s}}{s^3}$

(X) $F(s) = \dfrac{s + e^{-s} + 2se^{-2s}}{s^2}$

( ) $F(s) = \dfrac{s^2 + e^{-s} + 2se^{-2s}}{s^3}$

( ) $F(s) = \dfrac{s + (1-s)e^{-s} + 2se^{-2s}}{s^2}$

( ) $F(s) = \dfrac{s + (1-s)e^{-s} + 2se^{-2s}}{s^3}$

$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$:

( ) $\dfrac{e}{s} + \dfrac{e^{-s}}{s-1} - \dfrac{e^{-s}}{s} + \dfrac{e^{-2s}}{s-1}$

( ) $\dfrac{e + e^{-s+1} + e^{-s} + (e^4 - e^2)e^{-2s}}{s^2}$

( ) $\dfrac{e + e^{-s+1} + e^{-s} + (e^4 - e^2)e^{-2s}}{s}$

(X) $\dfrac{e}{s} + \dfrac{e^{-s+1}}{s-1} - \dfrac{e^{-s+1}}{s} + \dfrac{(e^4 - e^2)e^{-2s}}{s-1}$

( ) $\dfrac{e}{s} + \dfrac{e^{-s+1}}{s-1} - \dfrac{e^{-s+1}}{s} + \dfrac{e^2 e^{-2s}}{s-1}$

Solução: Temos:

$$f(t) = u(t) + (t-1)u(t-1) + 2u(t-2) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ t, & 1 < t < 2 \\ t+2, & t > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(t) = e^{f(t)} &= \begin{cases} e, & 0 < t < 1 \\ e^t, & 1 < t < 2 \\ e^{t+2}, & t > 2 \end{cases} \\ &= eu(t) + (e^t - e)u(t-1) + (e^{2+t} - e^t)u(t-2) \\ &= eu(t) + e(e^{t-1} - 1)u(t-1) + e^{t-2}(e^4 - e^2)u(t-2) \\ &= eu(t) + ee^{t-1}u(t-1) - eu(t-1) + (e^4 - e^2)e^{t-2}u(t-2) \end{aligned}$$

Observamos aqui que $g(3) = e^5$ e

$$\begin{aligned} \int_0^3 g(t)dt &= \int_0^1 g(t)dt + \int_1^2 g(t)dt + \int_2^3 g(t)dt \\ &= \int_0^1 edt + \int_1^2 e^t dt + \int_2^3 e^{t+2}dt \\ &= e + \left[e^t\right]_1^2 + \left[e^{t+2}\right]_2^3 \\ &= e + \left(e^2 - e^1\right) + \left(e^5 - e^4\right) \\ &= e^5 - e^4 + e^2. \end{aligned}$$

Usando a propriedade da translação e o item 7 da tabela, obtemos:

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} + 2\frac{e^{-2s}}{s} = \frac{s + e^{-s} + 2se^{-2s}}{s^2}$$

e

$$G(s) = \frac{e}{s} + \frac{ee^{-s}}{s-1} - \frac{ee^{-s}}{s} + \frac{(e^4 - e^2)e^{-2s}}{s-1}$$

• **Questão 2** (0.5 cada item) Considere o problema

$$\begin{aligned} y''(t) + 4y(t) &= 2\delta(t-1), \qquad 0 \le t \le \pi \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= 2 \\ y(\pi) &= 1 - \operatorname{sen}(2) \end{aligned}$$

Assinale na primeira coluna a solução do problema em função da condição inicial y_0 e, na segunda coluna, assinale o valor de y_0.

$y(t)$	y_0
( ) $y(t) = y_0 \operatorname{sen}(2t) + \cos(2t) + u(t-1)\operatorname{sen}(2(t-1))$	( ) 2
( ) $y(t) = y_0 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) + \operatorname{sen}(2(t-1))$	(X) 1
( ) $y(t) = y_0 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) + u(t-1)\operatorname{sen}(2t)$	( ) 0
(X) $y(t) = y_0 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) + u(t-1)\operatorname{sen}(2(t-1))$	( ) -1
( ) $y(t) = y_0 \operatorname{sen}(2t) + 2\cos(2t) + 2\cos(2(t-1))$	( ) -2

Solução:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) &= 2e^{-s} \\ &\Downarrow \\ (s^2+4)Y(s) &= sy_0 + 2 + 2e^{-s} \\ &\Downarrow \\ Y(s) &= \frac{sy_0}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4} + \frac{2e^{-s}}{s^2+4} \end{aligned}$$

Portanto:

$$y(t) = y_0 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) + u(t-1)\operatorname{sen}(2(t-1))$$

Como $y(\pi) = 1 - \operatorname{sen}(2)$, temos:

$$y(\pi) = y_0 \cos(2\pi) + \operatorname{sen}(2\pi) + \operatorname{sen}(2(\pi-1)) = 1 - \operatorname{sen}(2).$$

Como $\operatorname{sen}(2\pi) = 0$ e $\operatorname{sen}(2(\pi-1)) = -\operatorname{sen}(2)$, temos

$$y_0 = 1.$$

• **Questão 3** (0.5 cada item) Seja $f(t) = \delta(t-1) + \delta(t-3)$ e $x(t)$ satisfazendo o problema:

$$x'(t) + \pi^2 \int_0^t x(\tau)d\tau = tf(t),$$

com $x(0) = 0$.

Assinale as alternativas que apresentam o valor de $x(1/2)+x(2)+x(4)$ e a função $x(t)$ para $t \geq 3$, respectivamente.

$x(1/2) + x(2) + x(4)$	$x(t)$ para $t \geq 3$
(X) -5	( ) $-5\cos(\pi t)$
( ) -4	( ) $-5\,\mathrm{sen}(\pi t)$
( ) -3	(X) $-4\cos(\pi t)$
( ) -2	( ) $-4\,\mathrm{sen}(\pi t)$
( ) -1	( ) $-\,\mathrm{sen}(\pi t) - 4\cos(\pi t)$

Solução:

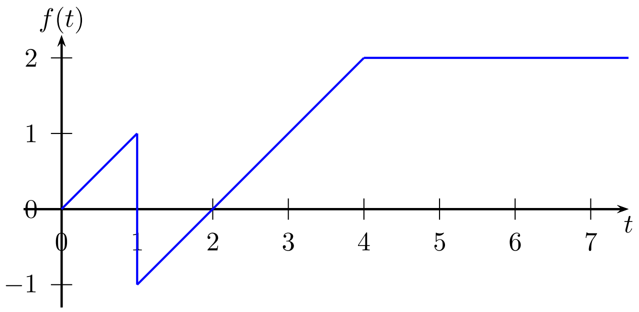
$$\begin{aligned}
\left(s + \frac{\pi^2}{s}\right) X(s) &= e^{-s} + 3e^{-3s} \\
\left(s^2 + \pi^2\right) X(s) &= s\left(e^{-s} + 3e^{-3s}\right) \\
X(s) &= \frac{s}{s^2+\pi^2}\left(e^{-s} + 3e^{-3s}\right) \\
x(t) &= \cos(\pi(t-1))u(t-1) + 3\cos(\pi(t-3))u(t-3) \\
x(t) &= -\cos(\pi t)u(t-1) - 3\cos(\pi t)u(t-3)
\end{aligned}$$

$$x(1/2) = 0, \quad x(2) = -1, \quad x(4) = -1 - 3 = -4$$

$$x(t) = -4\cos(\pi t), t > 3$$

• **Questão 4** (0.5 cada item) Considere a função $f(t)$ dada no gráfico abaixo:

Assinale as expressões em termos das funções Delta de Dirac e Heavisides para $f(t)$ e $g(t) = f'(t)$ e as expressões para as transformadas de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\}$.



$f(t)$:

( ) $tu(t) + (t-2)u(t-1) + 2u(t-4)$

(X) $tu(t) - 2u(t-1) - (t-4)u(t-4)$

( ) $tu(t) + (t-2)u(t-1) + 2u(t-4) - 2\delta(t-1)$

( ) $u(t) - u(t-4)$

( ) $u(t) - 2\delta(t-1) - u(t-4)$

( ) $\delta(t) - 2\delta(t-1) - \delta(t-4)$

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$:

( ) $\dfrac{1-2se^{-s}-e^{-4s}}{s^3}$

(X) $\dfrac{1-2se^{-s}-e^{-4s}}{s^2}$

( ) $\dfrac{1-2se^{-s}-e^{-4s}}{s}$

( ) $\dfrac{1-2se^{-s}-(1-4s)e^{-4s}}{s^2}$

( ) $\dfrac{1-2se^{-s}-(1-4s)e^{-4s}}{s}$

$g(t) = f'(t)$

( ) $tu(t) + (t-2)u(t-1) + 2u(t-4)$

( ) $tu(t) - 2u(t-1) - (t-4)u(t-4)$

( ) $tu(t) + (t-2)u(t-1) + 2u(t-4) - 2\delta(t-1)$

( ) $u(t) - u(t-4)$

(X) $u(t) - 2\delta(t-1) - u(t-4)$

( ) $\delta(t) - 2\delta(t-1) - \delta(t-4)$

$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\}$:

( ) $\dfrac{1-2se^{-s}-e^{-4s}}{s^3}$

( ) $\dfrac{1-2se^{-s}-e^{-4s}}{s^2}$

(X) $\dfrac{1-2se^{-s}-e^{-4s}}{s}$

( ) $\dfrac{1-2se^{-s}-(1-4s)e^{-4s}}{s^2}$

( ) $\dfrac{1-2se^{-s}-(1-4s)e^{-4s}}{s}$

Solução: Escrevemos a função $f(t)$ da esquerda para a direita em termos de Heavisides

$$\begin{aligned} f(t) &= tu(t) + (t-2-t)u(t-1) + (2-(t-2))u(t-4) \\ &= tu(t) - 2u(t-1) - (t-4)u(t-4) \end{aligned}$$

Calculamos a Transformada de Laplace usando a propriedade do deslocamento em t:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s^2} \\ &= \frac{1-2se^{-s}-e^{-4s}}{s^2} \end{aligned}$$

Podemos calcular a derivada direto do gráfico ou fazer a derivada formal de $f(t)$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= t\delta(t) + u(t) - 2\delta(t-1) - (t-4)\delta(t-4) - u(t-4) \\ &= u(t) - 2\delta(t-1) - u(t-4) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \frac{1}{s} - 2e^{-s} - \frac{e^{-4s}}{s} \\ &= \frac{1 - 2se^{-s} - e^{-4s}}{s}.\end{aligned}$$

• **Questão 5** (3.0 ponto) Considere um modelo para evolução da concentração de um medicamento administrado uma vez por dia por três dias:

$$\begin{cases} c'(t) = -\ln(2)c(t) + \delta(t) + 2\delta(t-1) + 3\delta(t-2) \\ c(0) = 0 \end{cases}$$

Use as técnicas das transformadas de Laplace para resolver o problema acima.

a) (2.0) Calcule a transformadas de Laplace $C(s) = \mathcal{L}\{c(t)\}$ e a solução $c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}$ e preencha os retângulos abaixo:

C(s) =	c(t) =

b) (1.0) Trace o gráfico da solução $c(t)$.

Complete a seguinte tabela para traçar o gráfico:

t	$c(t)$
$\lim\limits_{t\to 0+} c(t)$	1
$1/2$	$2^{-1/2}$
$\lim\limits_{t\to 1-} c(t)$	$\frac{1}{2}$
$\lim\limits_{t\to 1+} c(t)$	$\frac{5}{2}$
$3/2$	$2^{-3/2} + 2^{1/2}$
$\lim\limits_{t\to 2-} c(t)$	$\frac{5}{4}$
$\lim\limits_{t\to 2+} c(t)$	$\frac{17}{4}$
$5/2$	$2^{-5/2} + 2^{3/2}$
$\lim\limits_{t\to \infty} c(t)$	0

Solução: Aplicamos a transformada de Laplace para obter

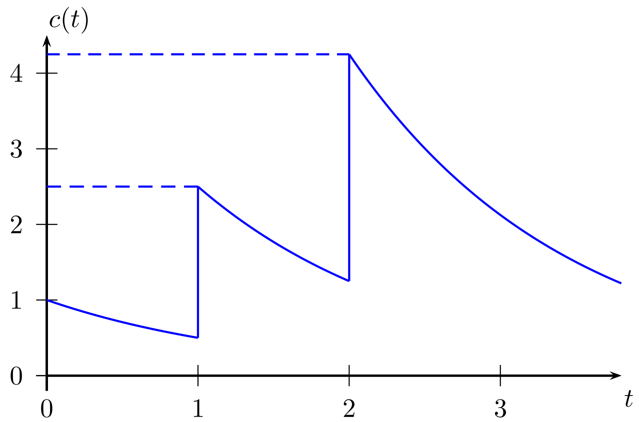
$$sC(s) - c(0) = -\ln(2)C(s) + 1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s}.$$

Substituímos $c(0) = 0$ e isolamos $C(s)$ para obter

$$C(s) = \frac{1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s}}{s + \ln(2)}.$$

A transformada inversa é calculada usando o item 7 da tabela e a propriedade da deslocamento no eixo t:

$$\begin{aligned} c(t) &= e^{-t\ln(2)} + 2u(t-1)e^{-(t-1)\ln(2)} + 3u(t-2)e^{-(t-2)\ln(2)} \\ &= 2^{-t} + 2u(t-1)2^{-(t-1)} + 3u(t-2)2^{-(t-2)} \\ &= 2^{-t} + u(t-1)2^{-(t-2)} + 3u(t-2)2^{-(t-2)} \end{aligned}$$



• **Questão 6** (1.0 ponto) Resolva a seguinte equação difero-integral:

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau)\,\mathrm{sen}(t-\tau)d\tau.$$

Solução: Aplicamos a transformada de Laplace para obter

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{Y(s)}{s^2+1},$$

onde usamos a propriedade da convolução.

$$\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)Y(s) = \frac{1}{s^2},$$

isto é

$$(s^2+1-1)Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}.$$

Para calcular a transformada inversa, usando o item 3 da tabela:

$$y(t) = t + \frac{t^3}{6}$$