**UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**
**Departamento de Matemática Pura e Aplicada**
**MAT01168 - 2023/1 - Turma C**
**Prova da área IIA**

| 1 - 3 | 4 | 5 | Total |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Nome:** ______________________ **Cartão:** ____________ **Turma:**____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

| | |
|---|---|
| $\text{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ | $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ |
| $\text{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ | $\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ |
| $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$ | |
| $\text{sen}(x+y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$ | |
| $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)$ | |

Propriedades:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Linearidade | $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$ |
| 2 | Transformada da derivada | $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$<br>$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$ |
| 3 | Deslocamento no eixo $s$ | $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$ |
| 4 | Deslocamento no eixo $t$ | $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$<br>$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$ |
| 5 | Transformada da integral | $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$ |
| 6 | Filtragem da Delta de Dirac | $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$ |
| 7 | Transformada da Delta de Dirac | $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$ |
| 8 | Teorema da Convolução | $\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$,<br>onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ |
| 9 | Transformada de funções periódicas | $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$ |
| 10 | Derivada da transformada | $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$ |
| 11 | Integral da transformada | $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})d\hat{s}$ |

Séries:

| |
|---|
| $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$ |
| $\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$ |
| $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$ |
| $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$ |
| $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$ |
| $\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$ |
| $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$ |
| $\text{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$ |
| $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$ |
| $(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$<br>$-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, \ldots$ |

Funções especiais:

| | |
|---|---|
| Função Gamma | $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$ |
| Propriedade da Função Gamma | $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$<br>$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$ |
| Função de Bessel modificada de ordem $\nu$ | $I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$ |
| Função de Bessel de ordem 0 | $J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$ |
| Integral seno | $\text{Si}\,(t) = \int_0^t \dfrac{\text{sen}(x)}{x}dx$ |

Integrais:

| |
|---|
| $\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$ |
| $\int x^2 e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$ |
| $\int x^n e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}x^n e^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x + C$ |
| $\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\,\text{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$ |
| $\int x\,\text{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\text{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$ |
| $\int e^{\lambda x}\,\text{sen}(wx)\,dx = \dfrac{e^{\lambda x}(\lambda\,\text{sen}(wx) - w\cos(wx))}{\lambda^2 + w^2}$ |

Tabela de transformadas de Laplace:

| | $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ | $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{s}$ | $1$ |
| 2 | $\frac{1}{s^2}$ | $t$ |
| 3 | $\frac{1}{s^n},\qquad (n=1,2,3,...)$ | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ |
| 4 | $\frac{1}{\sqrt{s}},$ | $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ |
| 5 | $\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$ | $2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ |
| 6 | $\frac{1}{s^k},\qquad (k>0)$ | $\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$ |
| 7 | $\frac{1}{s-a}$ | $e^{at}$ |
| 8 | $\frac{1}{(s-a)^2}$ | $te^{at}$ |
| 9 | $\frac{1}{(s-a)^n},\qquad (n=1,2,3...)$ | $\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$ |
| 10 | $\frac{1}{(s-a)^k},\qquad (k>0)$ | $\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$ |
| 11 | $\frac{1}{(s-a)(s-b)},\qquad (a\neq b)$ | $\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$ |
| 12 | $\frac{s}{(s-a)(s-b)},\qquad (a\neq b)$ | $\frac{1}{a-b}\left(ae^{at}-be^{bt}\right)$ |
| 13 | $\frac{1}{s^2+w^2}$ | $\frac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)$ |
| 14 | $\frac{s}{s^2+w^2}$ | $\cos(wt)$ |
| 15 | $\frac{1}{s^2-a^2}$ | $\frac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$ |
| 16 | $\frac{s}{s^2-a^2}$ | $\cosh(at)$ |
| 17 | $\frac{1}{(s-a)^2+w^2}$ | $\frac{1}{w}e^{at}\operatorname{sen}(wt)$ |
| 18 | $\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$ | $e^{at}\cos(wt)$ |
| 19 | $\frac{1}{s(s^2+w^2)}$ | $\frac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$ |
| 20 | $\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$ | $\frac{1}{w^3}(wt-\operatorname{sen}(wt))$ |
| 21 | $\frac{1}{(s^2+w^2)^2}$ | $\frac{1}{2w^3}(\operatorname{sen}(wt)-wt\cos(wt))$ |
| 22 | $\frac{s}{(s^2+w^2)^2}$ | $\frac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt)$ |
| 23 | $\frac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$ | $\frac{1}{2w}(\operatorname{sen}(wt)+wt\cos(wt))$ |
| 24 | $\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)},\qquad (a^2\neq b^2)$ | $\frac{1}{b^2-a^2}(\cos(at)-\cos(bt))$ |
| 25 | $\frac{1}{(s^4+4a^4)}$ | $\frac{1}{4a^3}[\operatorname{sen}(at)\cosh(at)-\cos(at)\operatorname{senh}(at)]$ |
| 26 | $\frac{s}{(s^4+4a^4)}$ | $\frac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at))$ |
| 27 | $\frac{1}{(s^4-a^4)}$ | $\frac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}(at)-\operatorname{sen}(at))$ |
| 28 | $\frac{s}{(s^4-a^4)}$ | $\frac{1}{2a^2}(\cosh(at)-\cos(at))$ |
| 29 | $\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$ | $\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$ |
| 30 | $\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$ | $e^{\frac{-(a+b)t}{2}}I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$ |
| 31 | $\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$ | $J_0(at)$ |
| 32 | $\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$ | $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$ |
| 33 | $\frac{1}{(s^2-a^2)^k},\qquad (k>0)$ | $\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}I_{k-\frac{1}{2}}(at)$ |
| 34 | $\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}},\qquad (k>0)$ | $J_0(2\sqrt{kt})$ |
| 35 | $\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$ | $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$ |
| 36 | $\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$ | $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{senh}(2\sqrt{kt})$ |
| 37 | $e^{-k\sqrt{s}},\qquad (k>0)$ | $\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$ |
| 38 | $\frac{1}{s}\ln(s)$ | $-\ln(t)-\gamma,\qquad (\gamma\approx 0,5772)$ |
| 39 | $\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$ | $\frac{1}{t}\left(e^{bt}-e^{at}\right)$ |
| 40 | $\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$ | $\frac{2}{t}(1-\cos(wt))$ |
| 41 | $\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$ | $\frac{2}{t}(1-\cosh(at))$ |
| 42 | $\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$ | $\frac{1}{t}\operatorname{sen}(wt)$ |
| 43 | $\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$ | $\operatorname{Si}(t)$ |
| 44 | $\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$ | Onda quadrada<br>$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a\\ -1, & a<t<2a\end{cases}$<br>$f(t+2a)=f(t),\quad t>0$ |
| 45 | $\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$ | Onda triangular<br>$f(t)=\begin{cases}\frac{t}{a}, & 0<t<a\\ -\frac{t}{a}+2, & a<t<2a\end{cases}$<br>$f(t+2a)=f(t),\quad t>0$ |
| 46 | $\frac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$ | Retificador de meia onda<br>$f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen}(wt), & 0<t<\frac{\pi}{w}\\ 0, & \frac{\pi}{w}<t<\frac{2\pi}{w}\end{cases}$<br>$f\left(t+\frac{2\pi}{w}\right)=f(t),\quad t>0$ |
| 47 | $\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$ | Retificador de onda completa<br>$f(t)=\lvert\operatorname{sen}(wt)\rvert$ |
| 48 | $\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$ | Onda dente de serra<br>$f(t)=\frac{t}{a},\qquad 0<t<a$<br>$f(t)=f(t-a),\quad t>a$ |

• **Questão 1** (0.5 cada item) Considere a função $f(t)$ dada por:

$$f(t) = u(t) - tu(t-1) + g(t)u(t-2)$$

Sabe-se que $f(t)$ é dada por partes como:

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & 0 < t < 1, \\ f_2(t), & 1 < t < 2, \\ 2, & t > 2. \end{cases}$$

Em que $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são funções definidas nos respectivos intervalos e $g(t)$ está definida para $t \geq 0$. Marque as alternativas que apresentam expressões para $f_2(t)$, $g(t)$, $I := \int_0^4 f(t)^2 dt$ e $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$.

( ) $f_2(t) = t - 1$

( x ) $f_2(t) = 1 - t$

( ) $f_2(t) = t + 1$

( ) $f_2(t) = -t$

( ) N.D.A.

( ) $g(t) = t - 1$

( ) $g(t) = 1 - t$

( x ) $g(t) = t + 1$

( ) $g(t) = 1$

( ) $g(t) = 2$

( ) $I = 46/3$

( ) $I = 34/3$

( x ) $I = 28/3$

( ) $I = 19/3$

( ) $I = 5/3$

( ) N.D.A.

( ) $F(s) = \dfrac{s + e^{-s} - e^{-2s}}{s}$

( x ) $F(s) = \dfrac{s - (1+s)e^{-s} + (3s+1)e^{-2s}}{s^2}$

( ) $F(s) = \dfrac{s^2 + (1+s)e^{-s} - (3s+1)e^{-2s}}{s^3}$

( ) $F(s) = \dfrac{s + e^{-s} - e^{-2s}}{s^2}$

( ) $F(s) = \dfrac{s + e^{-s} + (s-3)e^{-2s}}{s^2}$

**Solução:** Observe que, para $t > 2$, todas as Heavisides valem 1. Logo, para $t > 2$

$$f(t) = 1 - t + g(t) = 2.$$

Portanto, $g(t) = 1 + t$. No intervalo $1 < t < 2$, temos $u(t) = 1$, $u(t-1) = 1$ e $u(t-2) = 0$. Logo, $f_2(t) = 1 - t$. De maneira análoga, calculamos $f_1(t) = 1$.

Escrevemos

$$\begin{aligned} f(t) &= u(t) - tu(t-1) + (1+t)u(t-2) \\ &= u(t) - [(t-1)u(t-1) + u(t-1)] + [(t-2)u(t-2) + 3u(t-2)] \end{aligned}$$

e usamos a propriedade da translação para obter

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s} - \left[\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s}\right] + \frac{e^{-2s}}{s^2} + 3\frac{e^{-2s}}{s} \\ &= \frac{s - (1+s)e^{-s} + (3+s)e^{-2s}}{s^2} \end{aligned}$$

Também,

$$f(t)^2 = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ (t-1)^2, & 1 < t < 2, \\ 4, & t > 2. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(t)^2 dt &= \int_0^1 f(t)^2 dt + \int_1^2 f(t)^2 dt + \int_2^4 f(t)^2 dt \\ &= \int_0^1 1 dt + \int_1^2 (t-1)^2 dt + \int_2^4 4 dt \\ &= 1 + \int_0^1 t^2 dt + 8 \\ &= 1 + \frac{1}{3} + 8 = \frac{28}{3}. \end{aligned}$$

- **Questão 2** (0.5 cada item) Seja $\alpha = \ln(4)$, $f(t) = u(t-\alpha) + u(t-3\alpha)$ e $x(t)$ satisfaz o problema:

$$ax(t) + \int_0^t x(\tau)d\tau = af(t)$$

Assinale as alternativas que apresentam o valor de $x(2\alpha)$ e a valor do salto dado por $\lim_{t\to 3\alpha+} x(t) - \lim_{t\to 3\alpha-} x(t)$, respectivamente.

$x(2\alpha)$

( x ) $2^{-2a^{-1}}$

(  ) $2^{-a^{-1}}$

(  ) $1$

(  ) $2^{a^{-1}}$

(  ) $2^{2a^{-1}}$

$\lim_{t\to 3\alpha+} x(t) - \lim_{t\to 3\alpha-} x(t)$

(  ) $2$

( x ) $1$

(  ) $-1$

(  ) $-2$

(  ) $-3$

**Solução:**

$$\begin{aligned}
\left(a + \frac{1}{s}\right) X(s) &= \frac{a}{s}\left(e^{-\alpha s} + e^{-3\alpha s}\right) \\
\left(s + \frac{1}{a}\right) X(s) &= \left(e^{-\alpha s} + e^{-3\alpha s}\right) \\
X(s) &= \frac{1}{s + a^{-1}}\left(e^{-\alpha s} + e^{-3\alpha s}\right) \\
x(t) &= e^{-a^{-1}(t-\alpha)}u(t-\alpha) + e^{-a^{-1}(t-3\alpha)}u(t-3\alpha) \\
x(2\alpha) &= e^{-a^{-1}\alpha} = 2^{-2a}
\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to 3\alpha+} x(t) - \lim_{t\to 3\alpha-} x(t) = 1$$

• **Questão 3** (0.5 cada item) Considere a função $f(t)$ dada pela expressão:

$$f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 3 \\ 2, & t \ge 3 \end{cases}$$

Assinale abaixo expressões em termos das funções Delta de Dirac e Heavisides para $f(t)$ e $g(t) = f'(t)$ e expressões para as transformadas de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\}$.

$f(t)$

( ) $(1-t^2)u(t) + 2u(t-3)$

( ) $(1-t^2)u(t) - (t^2-1)u(t-1) + 2u(t-3)$

( ) $(1-t^2)u(t-1) + (1+t^2)u(t-3)$

( x ) $(1-t^2)u(t) + (t^2-1)u(t-1) + 2u(t-3)$

( ) $(1-t^2)u(t-1) + (t^2-1)u(t-3)$

$g(t) = f'(t)$

( x ) $\delta(t) - 2tu(t) + 2tu(t-1) + 2\delta(t-3)$

( ) $\delta(t) + 2tu(t) - 2tu(t-1)$

( ) $\delta(t) - tu(t) + tu(t-1) + \delta(t-3)$

( ) $\delta(t) - 2tu(t) + 2tu(t-1)$

( ) $\delta(t) - 2tu(t) + 2\delta(t-3)$

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

( ) $\dfrac{s^2-2+2(1+s)e^{-s}+2s^2e^{-3s}}{s}$

( ) $\dfrac{s^2-2+2(1+s)e^{-s}+2s^2e^{-3s}}{s^2}$

( ) $\dfrac{s-2+2(1+s)e^{-s}-2s^2e^{-3s}}{s^3}$

( x ) $\dfrac{s^2-2+2(1+s)e^{-s}+2s^2e^{-3s}}{s^3}$

( ) $\dfrac{s-2+2(1+s)e^{-s}-2s^2e^{-3s}}{s^2}$

$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\}$:

( x ) $\dfrac{s^2-2+2(1+s)e^{-s}+2s^2e^{-3s}}{s^2}$

( ) $\dfrac{s^2-2+2(1+s)e^{-s}+2s^2e^{-3s}}{s}$

( ) $\dfrac{s^2-2+2(1+s)e^{-s}+2s^2e^{-3s}}{s^3}$

( ) $\dfrac{s-2+2(1+s)e^{-s}-2s^2e^{-3s}}{s^3}$

( ) $\dfrac{s-2+2(1+s)e^{-s}-2s^2e^{-3s}}{s^2}$

**Solução:** Dada a função

$$f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 3 \\ 2, & t \ge 3 \end{cases},$$

escrevemos da esquerda para a direita em termos de Heavisides:

$$\begin{aligned} f(t) &= (1-t^2)u(t) + (t^2-1)u(t-1) + 2u(t-3) \\ &= u(t) - t^2u(t) + (t^2-2t+1+2t-1-1)u(t-1) + 2u(t-3) \\ &= u(t) - t^2u(t) + (t-1)^2u(t-1) + 2(t-1)u(t-1) + 2u(t-3). \end{aligned}$$

Calculamos a Transformada de Laplace usando a propriedade do deslocamento em $t$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + \frac{2e^{-s}}{s^3} + 2\frac{e^{-s}}{s^2} + 2\frac{e^{-3s}}{s} \\ &= \frac{s^2-2+2(1+s)e^{-s}+2s^2e^{-3s}}{s^3}. \end{aligned}$$

A derivada formal de $f(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} f'(t) &= (1-t^2)\delta(t) - 2tu(t) + (t^2-1)\delta(t-1) + 2tu(t-1) + 2\delta(t-3) \\ &= \delta(t) - 2tu(t) + 2tu(t-1) + 2\delta(t-3) \\ &= \delta(t) - 2tu(t) + 2(t-1)u(t-1) + 2u(t-1) + 2\delta(t-3) \end{aligned}$$

e a transformada de Laplace é dada por A derivada formal de $f(t)$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\} &= 1 - \frac{2}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s} + 2e^{-3s} \\
&= \frac{s^2 - 2 + 2(1+s)e^{-s} + 2s^2e^{-3s}}{s^2}
\end{aligned}
$$

• **Questão 4** (0.5 cada item + 1.0 pelos gráficos e tabela, todo desenvolvimento é avaliado.) Considere o problema:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(2)}y'(t) + y(t) &= 1 + u(t-1), \qquad 0 \le t \le 2\\ y(0) &= y_0\\ y(2) &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Assinale as alternativas corretas, complete a tabela e trace os gráficos de $y(t)$ e $y'(t)$, indicando eixos e valores notáveis. Use $\sqrt{2} \approx 1,4$.

( ) $y(1/2) + y(3/2) = 2 + \sqrt{2}$

( ) $y(1/2) + y(3/2) = 2 - \sqrt{2}$

( ) $y(1/2) + y(3/2) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

( ) $y(1/2) + y(3/2) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

( x ) N.D.A.

( x ) $y_0 = 1$

( ) $y_0 = 2$

( ) $y_0 = 3$

( ) $y_0 = 4$

( ) N.D.A.

| $t$ | $y(t)$ | $y'(t)$ |
|---|---|---|
| $1/2$ | $1$ | $0$ |
| $\lim_{t\to 1-}$ | $1$ | $0$ |
| $\lim_{t\to 1+}$ | $1$ | $\ln(2)$ |
| $3/2$ | $2 - 2^{-1/2}$ | $\ln(2)2^{-1/2}$ |

**Solução:**

$$\begin{aligned}sY(s) - y_0 + \ln(2)Y(s) &= \ln(2)\left[\frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s}\right]\\ &\Downarrow\\ [s+\ln(2)]\,Y(s) &= y_0 + \ln(2)\left[\frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s}\right]\\ &\Downarrow\\ Y(s) &= \frac{y_0}{s+\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{s(s+\ln(2))} + \frac{\ln(2)e^{-s}}{s(s+\ln(2))}\end{aligned}$$

Portanto:

$$y(t) = y_0 2^{-t} + (1-2^{-t}) + u(t-1)(1-2^{1-t})$$

Vemos que $y(2) = y_0 2^{-2} + (1-2^{-2}) + (1-2^{-1}) = \frac{y_0+5}{4}$, pelo que $y_0 = 1$.

Finalmente, temos:

$$y(t) = 1 + u(t-1)(1-2^{1-t})$$

Assim $y(1/2) = 1$ e $y(3/2) = 2 - 2^{-1/2}$ Além disso:

$$y'(t) = \delta(t-1)(1-2^{1-t}) + u(t-1)\ln(2)2^{1-t} = u(t-1)\ln(2)2^{1-t}$$

• **Questão 5** (3.0 pontos) A temperatura numa sala climatizada evolui no tempo conforme o seguinte modelo simplificado:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\lambda(v(t) - v_{amb}) + q(t) \tag{1}$$

onde $v(t)$ representa a temperatura medida, $v_{amb}$ é temperatura ambiente, $q(t)$ é a potência de um aquecedor e $\lambda$ é uma constante relacionada às trocas de calor. Suponha também que a temperatura é regulada por um sistema de controle automático que procura ajustar a potência $q(t)$ de forma que a temperatura medida se mantenha próxima de zero grau Celcius. O sistema de controle automático é regido pela seguinte equação:

$$q(t) = -\epsilon\frac{dq(t)}{dt} - K_p v(t) - K_d\frac{dv(t)}{dt} \tag{2}$$

Considere $\epsilon = 1/2$, $K_p = 5$, $K_d = 2$, $\lambda = 1$, $v_{amb} = -10$, $v(0) = 0$, $q(0) = -2$.

a) (1.0) Encontre $V(s) := \mathcal{L}\{v(t)\}$. Expresse como uma função racional cujo demoninador é um polinônio cúbico

b) (1.0) Encontre $v(t)$.

c) (1.0) Calcule $v_\infty := \lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ e $q_\infty := \lim\limits_{t\to\infty} q(t)$.

**Obs:** Copie suas respostas finais abaixo. O desenvolvimento também será avaliado.

| | |
|---|---|
| $V(s) = \dfrac{-20-12s}{s(s+3)(s+4)} = \dfrac{-20-12s}{s(s^2+7s+12)}$ | |
| $v(t) = -\dfrac{5}{3} - \dfrac{16}{3}e^{-3t} + 7e^{-4t} = \dfrac{-5-16e^{-3t}+21e^{-4t}}{3}$ | |
| $v_\infty = -\frac{5}{3}$ | $q_\infty = \frac{25}{3}$ |

**Solução:**

Da segunda equação:

$$\begin{aligned}
Q(s) &= -\frac{1}{2}\left(sQ(s)+2\right) - 5V(s) - 2sV(s)\\
\left(\frac{1}{2}s+1\right)Q(s) &= -1 - (2s+5)\,V(s)\\
(s+2)\,Q(s) &= -2 - 2\,(2s+5)\,V(s)
\end{aligned}$$

Da primeira equação:

$$\begin{aligned}
sV(s) &= -\left(V(s) + \frac{10}{s}\right) + Q(s)\\
(s+1)V(s) &= -\frac{10}{s} + Q(s)\\
(s+2)(s+1)V(s) &= -\frac{10(s+2)}{s} + (s+2)Q(s)
\end{aligned}$$

Substuindo, temos:

$$\begin{aligned}
(s+2)(s+1)V(s) &= -\frac{10(s+2)}{s} - 2 - 2\,(2s+5)\,V(s)\\
(s^2+7s+12)V(s) &= -\frac{10(s+2)}{s} - 2\\
s(s+3)(s+4)V(s) &= -10(s+2) - 2s = -20 - 12s
\end{aligned}$$

Portanto,

$$V(s) \quad = \quad \frac{-20-12s}{s(s+3)(s+4)} = -\frac{5}{3}\frac{1}{s} - \frac{16}{3}\frac{1}{s+3} + \frac{7}{s+4}$$

E, finalmente:

$$v(t) \quad = \quad -\frac{5}{3} - \frac{16}{3}e^{-3t} + 7e^{-4t}.$$

Para obter os limites no infinito, calculamos:

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = -\frac{5}{3}$$

Além disso, vemos que:

$$Q(s) = -\frac{2}{s+2} - \frac{2(2s+5)}{s+2}V(s)$$

e

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = \lim_{s\to 0+} sQ(s) = -5\lim_{s\to 0+} sV(s) = \frac{25}{3}.$$