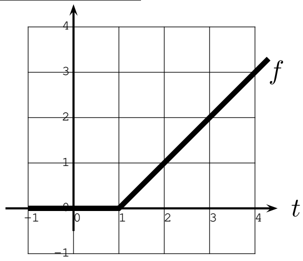
UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2023/2
Prova da área IIA

1 - 4	5	6	Total

Nome: Gabarito ______________________ **Cartão:** ______________



• **Questão 1** Considere $y(t)$ tal que $\begin{cases} 2y' + y = f(t), & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$, onde $f(\cdot)$ é dada ao lado

É correto: (0.6pt)

( ) $Y(s) = \dfrac{2s^2 - s + 1}{s^2(2s+1)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{s^2 - s + 1}{s^2(2s+1)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{1 - s}{s^2(2s+1)}$

(X) $Y(s) = \dfrac{2s^2 + e^{-s}}{s^2(2s+1)}$

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (0.6pt)
aqui $u(\cdot)$ é a função degrau unitário

(X) $y(t) = e^{-t/2} + (t - 3 + 2e^{-\frac{t-1}{2}})u(t-1)$

( ) $y(t) = t - 3$

( ) $y(t) = \dfrac{e^{-t/2}(3-t)}{3}$

( ) $y(t) = (t - 3 + 2e^{-\frac{t-1}{2}})u(t-1)$

( ) $y(t) = t - 3 + 4e^{-t/2}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: (a) $f(t) = (t-1)u(t-1)$, $\mathcal{L}(f) = e^{-s}\mathcal{L}(t) = \dfrac{e^{-s}}{s^2}$

$2(sY - 1) + Y = \dfrac{e^{-s}}{s^2} \Rightarrow (2s+1)Y = \dfrac{2s^2 + e^{-s}}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \dfrac{2s^2 + e^{-s}}{s^2(2s+1)}$

(b) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{2s+1} + \dfrac{e^{-s}}{s^2(2s+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s+\frac{1}{2}} + e^{-s}\dfrac{1}{s^2(2s+1)}\right)$

entretanto

$$\frac{1}{s^2(2s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{2s+1} = \frac{As(2s+1) + B(2s+1) + Cs^2}{s^2(2s+1)}$$

$1 = As(2s+1) + B(2s+1) + Cs^2$ para todo s.

$$s = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 = C\frac{1}{4} \Rightarrow C = 4$$
$$s = 0 \Rightarrow 1 = B(1) \Rightarrow B = 1$$
$$s = -1 \Rightarrow 1 = A + B(-1) + C \Rightarrow A = 1 + 1 - 4 = -2$$

e assim $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2(2s+1)}\right) = \mathcal{L}\left(\dfrac{-2}{s} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{4}{2s+1}\right) = \mathcal{L}\left(\dfrac{-2}{s} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{2}{s+\frac{1}{2}}\right) = -2 + t + 2e^{-t/2}$

portanto $y(t) = e^{-t/2} + (2e^{-\frac{(t-1)}{2}} + (t-1) - 2)u(t-1) = e^{-t/2} + (2e^{-\frac{(t-1)}{2}} + t - 3)u(t-1)$

• **Questão 2** Considere $y(t)$ tal que $\begin{cases} y' + 2y = e^t, & t > 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$.

É correto: (0.6pt)

(X) $Y(s) = \dfrac{2s - 1}{(s+2)(s-1)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s-1)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{3 - 2s}{(s+2)(s-1)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{2s + 3}{(s+2)(s+1)}$

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (0.6pt)

( ) $y(t) = \dfrac{7}{3}e^{-2t} - \dfrac{1}{3}e^t$

( ) $y(t) = -\dfrac{1}{3}e^{-2t} + \dfrac{1}{3}e^t$

( ) $y(t) = -\dfrac{7}{3}e^{-2t} + \dfrac{1}{3}e^t$

( ) $y(t) = e^{-2t} + e^{-t}$

(X) nenhuma das anteriores

Solução:

$$sY - 2 + 2Y = \frac{1}{s-1} \Rightarrow Y = \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)(s-1)} = \frac{2s-1}{(s+2)(s-1)}$$

$$\text{decomposição em frações parciais: } \frac{1}{(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} = \frac{A(s-1)+B(s+2)}{(s+2)(s-1)}$$

$$\text{então } 1 = A(s-1) + B(s+2)\ \forall s \text{ e assim } s = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{3}; s = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \text{ e segue}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s+2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-1}\right) = \frac{5}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}$$

• **Questão 3** Seja $F(s) = \dfrac{s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)}$, sua decomposição em frações parciais, e sua transformada inversa de Laplace $f(t)$.

É correto: (0.6pt)

( ) $F(s) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{2}{(s+1)^2}$

( ) $F(s) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{2}{s+2}$

(X) $F(s) = \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{1}{(s+1)^2} - \dfrac{1}{s+2}$

( ) $F(s) = \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{2}{s+2}$

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (0.6pt)

( ) $f(t) = (2+t)e^{-t} + e^{-2t}$

(X) $f(t) = (2+t)e^{-t} - e^{-2t}$

( ) $f(t) = (1+2t)e^{-t} - e^{-2t}$

( ) $f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

( ) $f(t) = 2te^{-t} + e^{-2t}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução:

$$\frac{s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2} = \frac{A(s+1)(s+2) + B(s+2) + Cs^2}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$\text{implica } s^2 + 5s + 5 = A(s+1)(s+2) + B(s+2) + C(s+1)^2 \text{ para todo } s$$

$s = -1$ implica $(-1)^2 + 5(-1) + 5 = B(1) \Rightarrow B = 1$
$s = -2$ implica $(-2)^2 + 5(-2) + 5 = C(-1)^2 \Rightarrow C = -1$
$s = 0$ implica $5 = 2A + 2B + C = 2A + 1 \Rightarrow A = 2$

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+2}\right) = 2e^{-t} + te^{-t} - e^{-2t} = (t+2)e^{-t} - e^{-2t}$$

• **Questão 4** Considere a equação $f(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t f(\tau)(t-\tau)d\tau$ e $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$.

É correto: (0.6pt)

( ) $F(s) = \dfrac{1}{s^2-1}$

( ) $F(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2-1}$

(X) $F(s) = \dfrac{s}{s^2-1}$

( ) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$

( ) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (0.6pt)

( ) $f(t) = \operatorname{senh}(t)$

( ) $f(t) = \cos(t)$

( ) $f(t) = \operatorname{sen}(t)$

(X) $f(t) = \cosh(t)$

( ) $f(t) = e^t(\operatorname{senh}(t) + \cosh(t))$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: aplicando TL a $f = 1 + f * t$

$$F = \frac{1}{s} + F\frac{1}{s^2} \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{s^2}\right)F = \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{(s^2-1)F}{s^2} = \frac{1}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2-1}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-1}\right) = \cosh(t)$$

• **Questão 5** A fim de obter a solução do problema de valores de contorno (PVC)

$$\begin{cases} 4y'' + y = 2 & , 0 < t < \pi \\ y(0) = 1, & y(\pi) = 3 \end{cases}$$

é pedido:

(a)(1.0pt) temporariamente desconsidere a condição $y(\pi) = 3$, substituindo-a por $y'(0) = v_0$. Obtenha a expressão da respectiva transformada de Laplace $Y(s)$, como expressão de v_0 e s.

(b)(1.0pt) Obtenha a transformada inversa $y(t)$ da expressão $Y(s)$ obtida na parte (a)

(c)(0.8pt) Obtenha o valor de v_0 para o qual $y(\pi) = 3$, e a solução $y(t)$ do problema original.

Solução:

(i) denotando $y'(0) = v_0$ temos

$$4(s^2Y - s(1) - v_0) + Y = \frac{2}{s} \Rightarrow (4s^2+1)Y = 4s + 4v_0 + \frac{2}{s} \Rightarrow Y = \frac{4s}{4s^2+1} + \frac{4v_0}{4s^2+1} + \frac{2}{s(4s^2+1)}$$

reescrevendo:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+\frac{1}{4}} + 2v_0\frac{\frac{1}{2}}{s^2+\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{s\left(s^2+\frac{1}{4}\right)}$$

(ii) que implica

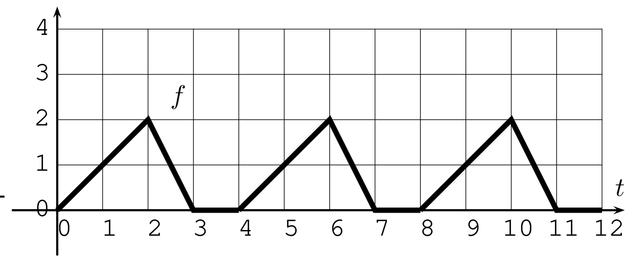
$$y(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) + 2v_0 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau = \cos\left(\frac{t}{2}\right) + 2v_0 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + \left[-2\cos\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]_0^t$$
$$y(t) = 2 - \cos\left(\frac{t}{2}\right) + 2v_0 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$$

(iii) equacionando $y(\pi) = 3$ produz $3 = 2 - 0 + 2v_0(1) \Rightarrow v_0 = \dfrac{1}{2}$ e portanto

$y(t) = 2 - \cos\left(\dfrac{t}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\dfrac{t}{2}\right)$ é a solução do PVC original.

• **Questão 6** Seja $f(\cdot)$ a função de menor período $T = 4$, extendida para todos os reais não-negativos, representada ao lado. Seja $y(\cdot)$ solução do PVI

$$\begin{cases} y' + y = & f \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



(i)(1.2pt) Obtenha $\mathcal{L}(f) = \dfrac{1 - 3e^{-s} + 2e^{-3s}}{s^2(1-e^{-4s})}$

(ii)(1.2pt) Obtenha a solução $y(t)$ usando a técnica de expansão em série de potências.

Solução: (i) $f' = \begin{cases} 1 & , 0 \le t \le 2 \\ -2 & , 2 \le t \le 3 \\ f'(t-4) & , t > 4 \end{cases}$ é uma função periódica de menor período $T = 4$.

$$\mathcal{L}(f') = \frac{1}{1-e^{-4s}}\int_0^4 f'(t)e^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-4s}}\left[\int_0^2 e^{-st}dt - 2\int_2^3 e^{-st}dt\right]$$
$$= \frac{1}{1-e^{-4s}}\left\{\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^2 - 2\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_2^3\right\} = \frac{1}{1-e^{-4s}}\frac{1-3e^{-2s}+2e^{-3s}}{s}$$

por outro lado $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0) = s\mathcal{L}(f)$ e como $f(0) = 0$,

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f') = \frac{1-3e^{-2s}+2e^{-3s}}{s^2(1-e^{-4s})}$$

Alternativamente: aqui $u(\cdot)$ é a função degrau unitário,

$$f(t) = \begin{cases} t & , 0 \le t \le 2 \\ 6 - 2t & , 2 \le t \le 3 \\ 0 & , 3 \le t \le 4 \end{cases} \text{ ou ainda, } f(t) = tu(t) - (3t-6)u(t-2) + (2t-6)u(t-3)$$

e portanto (observe $3t - 6 = 3(t-2)$ e ainda $2t - 6 = 2(t-3)$)

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(t) - e^{-2s}\mathcal{L}(3t) + e^{-3s}\mathcal{L}(2t) = \frac{1}{s^2} - e^{-2s}\frac{3}{s^2} + e^{-2s}\frac{2}{s^2} = \frac{2e^{-3s} - 3e^{-2s} + 1}{s^2}$$

(ii) como $0 \le e^{-4s} < 1$ temos

$$\frac{1}{1-e^{-4s}} = \frac{1}{1-q} \text{ onde } q = e^{-4s} \text{ implica } \frac{1}{1-e^{-4s}} = 1 + e^{-4s} + e^{-8s} + e^{-12s} + \ldots$$

por outro lado

$$sY-(0)+Y=\mathcal{L}(f)\Rightarrow Y=\frac{1}{s+1}\frac{1-3e^{-2s}+2e^{-3s}}{s^2(1-e^{-4s})}=\frac{1}{s^2(s+1)}\left(1-3e^{-2s}+2e^{-3s}\right)\left(1+e^{-4s}+e^{-8s}+e^{-12s}+\dots\right)$$

[I] decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+1}=\frac{As(s+1)+B(s+1)+Cs^2}{s^2(s+1)}$$

$$\text{implica } 1=As(s+1)+B(s+1)+Cs^2 \text{ para todo } s$$

$s=-1$ implica $1=C(-1)^2\Rightarrow C=1$
$s=0$ implica $1=B(1)\Rightarrow B=1$
$s=1$ implica $1=A(2)+B(2)+C\Rightarrow A=(1-2B-C)/2=-1$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}\right)=e^{-t}+t-1$$

[I] Alternativamente:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)=e^{-t}\ ,\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)=\int_0^t e^{-\tau}d\tau=1-e^{-t}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right)=\int_0^t(1-e^{-\tau})d\tau=\left[\tau+e^{-\tau}\right]_0^t=e^{-t}+t-1$$

Dessa forma, usando a aproximação $\dfrac{1}{1-e^{-4s}}=1+e^{-4s}$,

$$Y(s)=\frac{2e^{-3s}-3e^{-2s}+1}{s^2(s+1)}+\frac{2e^{-7s}-3e^{-6s}+e^{-4s}}{s^2(s+1)}$$
$$\Rightarrow y(t)=\left(e^{-t}+t-1\right)u(t)-3\left(e^{-(t-2)}+t-2-1\right)u(t-2)+2\left(e^{-(t-3)}+t-3-1\right)u(t-3)+$$
$$\left(e^{-(t-4)}+t-4-1\right)u(t-4)-3\left(e^{-(t-6)}+t-6-1\right)u(t-6)+2\left(e^{-(t-7)}+t-7-1\right)u(t-7)$$

e dessa forma segue a aproximação de 6 degraus

$$y(t)=\left(e^{-t}+t-1\right)u(t)-3\left(e^{-(t-2)}+t-3\right)u(t-2)+2\left(e^{-(t-3)}+t-4\right)u(t-3)+\left(e^{-(t-4)}+t-5\right)u(t-4)-$$
$$3\left(e^{-(t-6)}+t-7\right)u(t-6)+2\left(e^{-(t-7)}+t-8\right)u(t-7)$$

□