UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2023/2
Prova da área IIa

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})d\hat{s}$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, \ldots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,dx = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,dx = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,dx = \dfrac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}dx + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x}\operatorname{sen}(wx)\,dx = \dfrac{e^{\lambda x}(\lambda\operatorname{sen}(wx) - w\cos(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

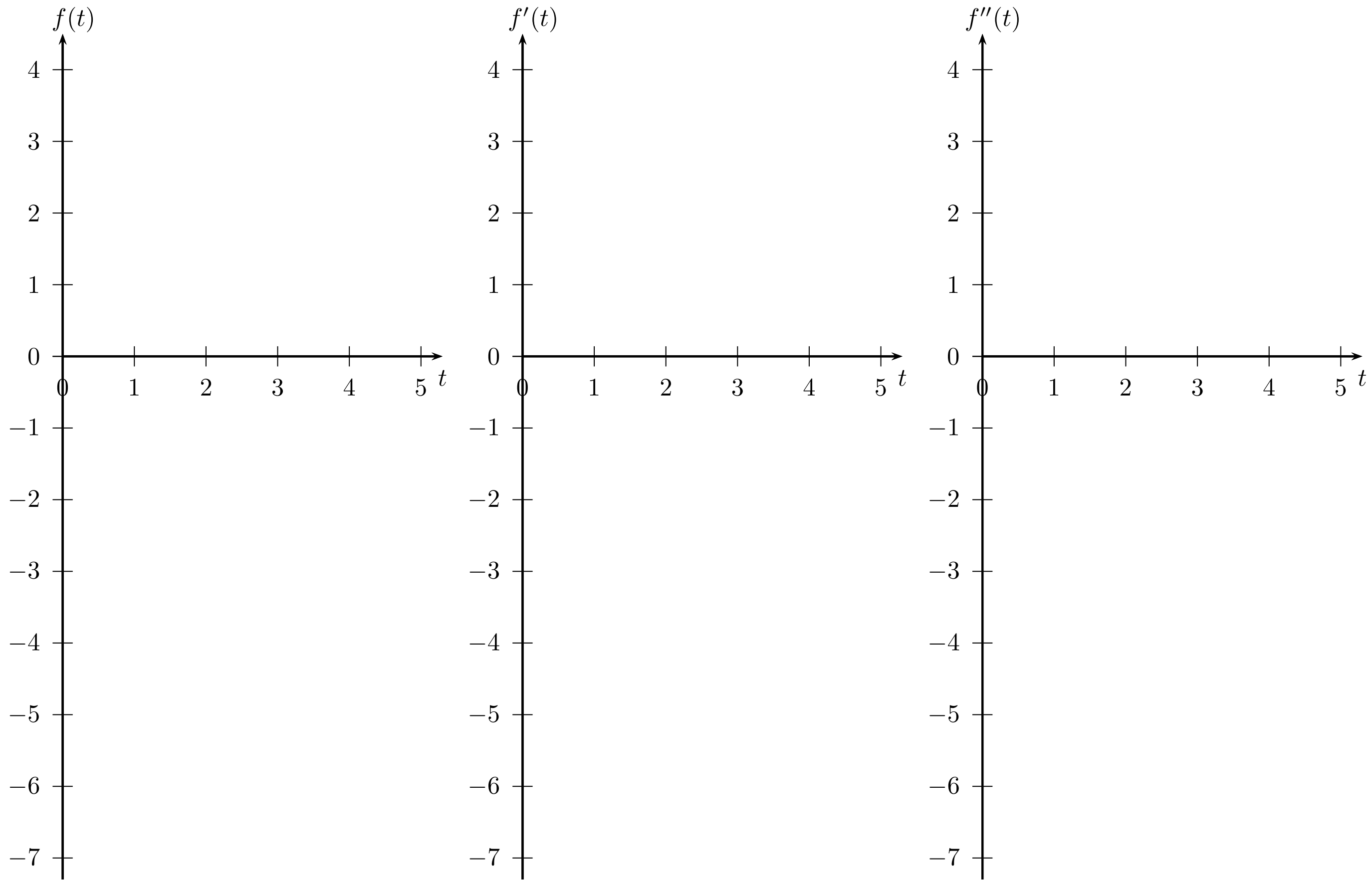
	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \qquad (n = 1, 2, 3...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2+w^2}$	$\frac{1}{w}\,\mathrm{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\,\mathrm{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\,\mathrm{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt - \mathrm{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\mathrm{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{t}{2w}\,\mathrm{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\mathrm{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)},$ $(a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\mathrm{sen}(at)\cosh(at) -$ $- \cos(at)\,\mathrm{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\,\mathrm{sen}(at)\,\mathrm{senh}(at))$
27	$\frac{1}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^3}(\mathrm{senh}(at) - \mathrm{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
33	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \qquad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \qquad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \qquad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\,\mathrm{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\mathrm{Si}\,(t)$
44	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \mathrm{sen}(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert\,\mathrm{sen}(wt)\rvert$
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s\,(1-e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t) = \frac{t}{a}, \qquad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

- **Questão 1** (3.0 pontos) Considere a função contínua

$$f(t) = \begin{cases} at^2, & 0 \le t < 1 \\ -2t+4, & 1 \le t \le 4 \\ b, & t > 4 \end{cases}$$

a) (0.5 ponto) Calcule os valores de a e b.

b) (0.5 ponto) Esboce os gráficos de $f(t)$, $f'(t)$ e $f''(t)$ nos espaços abaixo.



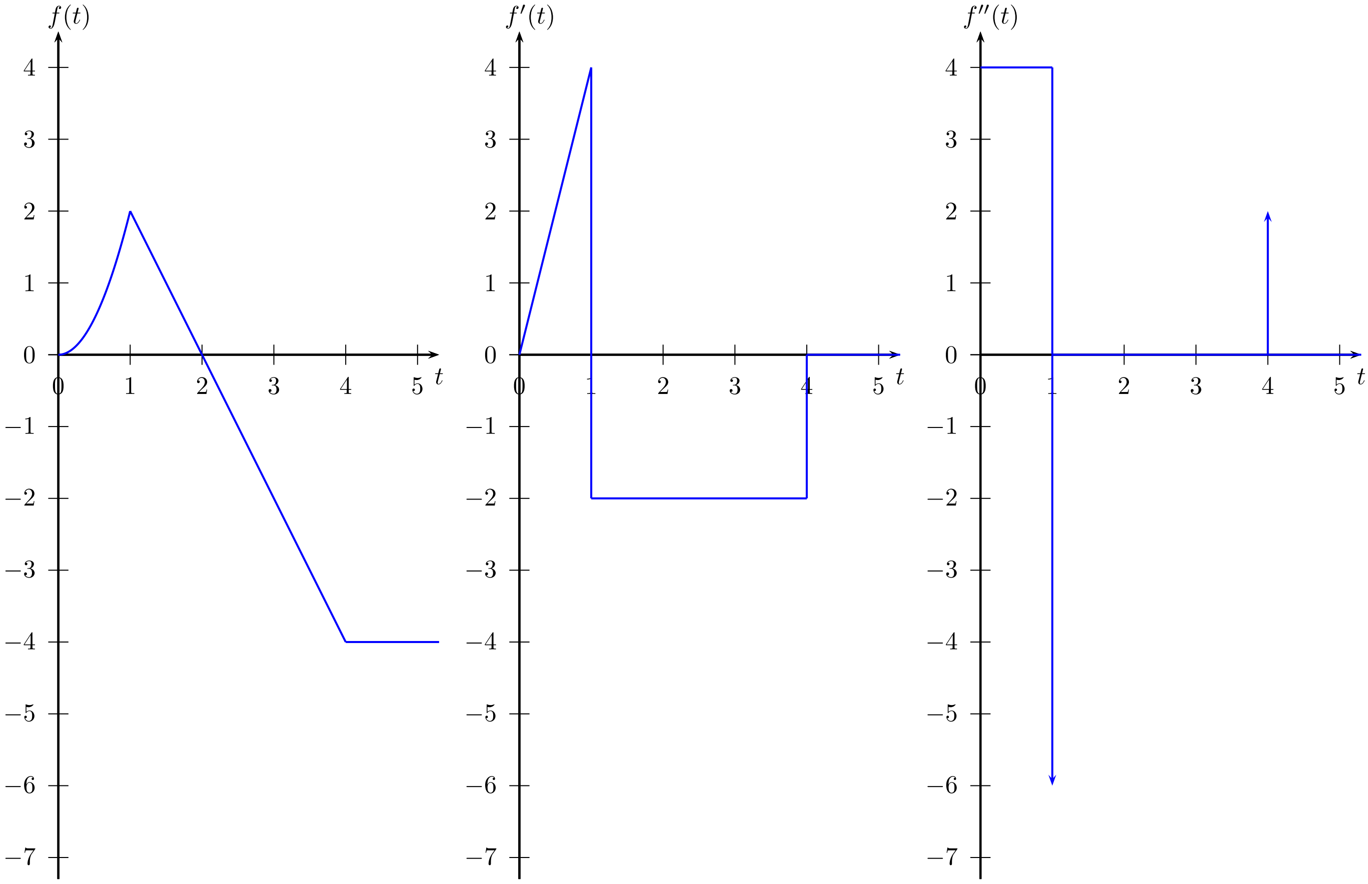
c) (1.0 ponto) Escreva $f(t)$, $f'(t)$ e $f''(t)$ em termos das funções de Dirac e Heaviside.

d) (1.0 ponto) Calcule as transformadas de Laplace das funções $f(t)$, $f'(t)$ e $f''(t)$.

Soluçao:

a) Em $t = 1$, temos $at^2 = -2t + 4$, isto é, $a = 2$. Também, em $t = 4$, temos $-2t + 4 = b$, isto é, $b = -4$.

b) Seguem os gráficos



c)

$$\begin{aligned}
f(t) &= 2t^2u(t) + (-2t + 4 - 2t^2)u(t-1) + (-4 - 4 + 2t)u(t-4) \\
&= 2t^2u(t) + (-2t^2 + 4t - 2 - 6t + 6)u(t-1) + (-8 + 2t)u(t-4) \\
&= 2t^2u(t) - 2(t-1)^2u(t-1) - 6(t-1)u(t-1) + 2(t-4)u(t-4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 4tu(t) + (-2 - 4t)u(t-1) + 2u(t-4) \\
&= 4tu(t) - 4(t-1)u(t-1) - 6u(t-1) + 2u(t-4).
\end{aligned}$$

$$f''(t) = 4u(t) - 4u(t-1) - 6\delta(t-1) + 2\delta(t-4).$$

d) Calculamos as transformadas de Laplace usando a Propriedade da translação no eixo t.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{4 - 4e^{-s} - 6se^{-s} + 2se^{-4s}}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{4 - 4e^{-s} - 6se^{-s} + 2se^{-4s}}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \frac{4 - 4e^{-s} - 6se^{-s} + 2se^{-4s}}{s}$$

- **Questão 2** (2.5 pontos) Dado o oscilador harmônico

$$\begin{cases} x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = f(t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases},$$

responda:

a) (0.5 ponto) Marque a resposta correta a respeito do amortecimento

( ) Superamortecido
( ) Subamortecido
( ) Criticamente amortecido
( ) Não amortecido
( ) Nenhum dos itens anteriores

b) (1.5 ponto) Suponha $f(t) = \delta(t-4) + \delta(t-7)$ e calcule $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ e $x(t)$

c) (0.5 ponto) Escreva $x(1)$, $x(5)$ e $x(8)$.

Solução:

a) Dado que $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$, o oscilador é criticamente amortecido.

b) Aplicamos a transformada de Laplace na equação para obter

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 6(sX(s) - x(0)) + 9X(s) = e^{-4s} + e^{-7s}.$$

Como as condições iniciais são nulas, obtemos

$$X(s) = \frac{e^{-7s}}{s^2 + 6s + 9} = \frac{e^{-4s} + e^{-7s}}{(s+3)^2}$$

O item 8 da tabela nos traz

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} = te^{-3t}.$$

Portanto, usando a propriedade da translação no eixo t, temos:

$$x(t) = (t-4)e^{-3(t-4)}u(t-4) + (t-7)e^{-3(t-7)}u(t-7).$$

c)

$$x(1) = 0, \qquad x(5) = e^{-3} \quad \text{e} \quad x(8) = 4e^{-12} + e^{-3}.$$

• **Questão 3** (2.5 pontos) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) + 8\displaystyle\int_0^t x(t-\tau)\cos(\tau)d\tau = e^{-t} + \operatorname{sen}(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Solução: Calculamos a transformada de Laplace para obter

$$sX(s) - x(0) + \frac{8sX(s)}{s^2+1} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

Assim, temos:

$$\left(s + \frac{8s}{s^2+1}\right) X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+1} + 1$$

ou seja,

$$\left(s^3 + 9s\right) X(s) = \frac{s^2+1}{s+1} + 1 + (s^2+1)$$

resultando em

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^2+1}{(s+1)\left(s^3+9s\right)} + \frac{1}{\left(s^3+9s\right)} + \frac{\left(s^2+1\right)}{\left(s^3+9s\right)} \\ &= \frac{s^2+1+s+1+(s+1)(s^2+1)}{(s+1)\left(s^3+9s\right)} \\ &= \frac{s^3+2s^2+2s+3}{s(s+1)(s^2+9)} \end{aligned}$$

Usando a técnica de frações parciais, temos:

$$\begin{aligned} \frac{s^3+2s^2+2s+3}{s(s+1)(s^2+9)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C+Ds}{s^2+9} \\ &= \frac{A(s+1)(s^2+9) + Bs(s^2+9) + (C+Ds)s(s+1)}{s(s+1)(s^2+9)} \\ &= \frac{Cs^2 + Cs + Ds^3 + Ds^2 + Bs^3 + 9Bs + 9As + As^3 + As^2 + 9A}{s(s+1)(s^2+9)} \\ &= \frac{(A+B+D)s^3 + (A+C+D)s^2 + (9A+9B+C)s + 9A}{s(s+1)(s^2+9)}. \end{aligned}$$

Chegamos no sistema:

$$\begin{cases} A+B+D = 1 \\ A+C+D = 2 \\ 9A+9B+C = 2 \\ 9A = 3 \end{cases}$$

Ao encontrar $A = \dfrac{1}{3}$, reduzimos o sistema a

$$\begin{cases} B+D = \dfrac{2}{3} \\ C+D = \dfrac{5}{3} \\ 9B+C = -1 \end{cases}$$

Fazemos $D = \dfrac{2}{3} - B$ para obter o sistema 2x2

$$\begin{cases} C - B = 1 \\ 9B + C = -1 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, temos $10B = -2$, ou seja, $B = -\dfrac{1}{5}$. Assim, $C = \dfrac{4}{5}$ e $D = \dfrac{13}{15}$. Portanto,

$$\frac{s^3 + 2s^2 + 2s + 3}{s(s+1)(s^2+9)} = \frac{1}{3s} - \frac{1}{5(s+1)} + \frac{4}{5(s^2+9)} + \frac{13s}{15(s^2+9)}.$$

Calculamos a transformada inversa usando a tabela:

$$x(t) = \frac{1}{3} - \frac{e^{-t}}{5} + \frac{4}{15}\,\mathrm{sen}(3t) + \frac{13}{15}\cos(3t)$$

- **Questão 4** (2.0 pontos) Calcule as seguintes transformadas inversas

a) (0.25 ponto) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s}{(s^2+9)^2}\right\}$

b) (0.25 ponto) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{54}{(s^2+9)^2}\right\}$

c) (0.5 ponto) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s}{((s-9)^2+9)^2}\right\}$

d) (1.0 ponto) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s}{((s-9)^2+9)^2(1-e^{-s})}\right\}$

[Dica: use uma expansão em série de Taylor para $\frac{1}{1-e^{-s}}$]

Solução:

a) Direto do item 22 da tabela

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s}{(s^2+9)^2}\right\} = t\,\mathrm{sen}(3t)$$

b) Direto do item 21 da tabela

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{54}{(s^2+9)^2}\right\} = \mathrm{sen}(3t) - 3t\cos(3t)$$

c) Pela propriedade da translação no eixo s, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s}{((s-9)^2+9)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6(s-9)}{((s-9)^2+9)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{54}{((s-9)^2+9)^2}\right\} \\
&= e^{9t}\left((t+1)\,\mathrm{sen}(3t) - 3t\cos(3t)\right)
\end{aligned}$$

d) Fazendo a expansão em Série de Taylor, conforme a dica

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s}{((s-9)^2+9)^2(1-e^{-s})}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s}{((s-9)^2+9)^2}\left(1+e^{-s}+e^{-2s}+\cdots\right)\right\} \\
&= e^{9t}\left((t+1)\,\mathrm{sen}(3t) - 3t\cos(3t)\right) \\
&+ u(t-1)e^{9(t-1)}\left(t\,\mathrm{sen}(3(t-1)) - 3(t-1)\cos(3(t-1))\right) \\
&+ u(t-2)e^{9(t-2)}\left((t-1)\,\mathrm{sen}(3(t-2)) - 3(t-2)\cos(3(t-2))\right) + \cdots
\end{aligned}$$