UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2023/2
Prova da área IIa

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\text{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\text{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\text{sen}(x+y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s),$ onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})d\hat{s}$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\text{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, \ldots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\text{Si}(t) = \int_0^t \dfrac{\text{sen}(x)}{x} dx$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\, dx = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x}\, dx = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x}\, dx = \dfrac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x\cos(\lambda x)\, dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\,\text{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\,\text{sen}(\lambda x)\, dx = \dfrac{\text{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x}\,\text{sen}(wx)\, dx = \dfrac{e^{\lambda x}(\lambda\,\text{sen}(wx) - w\cos(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\dfrac{1}{s}$	1
2	$\dfrac{1}{s^2}$	t
3	$\dfrac{1}{s^n}, \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\dfrac{1}{\sqrt{s}},$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$
6	$\dfrac{1}{s^k}, \qquad (k > 0)$	$\dfrac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\dfrac{1}{(s-a)^n}, \qquad (n = 1, 2, 3...)$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\dfrac{1}{(s-a)^k}, \qquad (k > 0)$	$\dfrac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
12	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
13	$\dfrac{1}{s^2 + w^2}$	$\dfrac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)$
14	$\dfrac{s}{s^2 + w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\dfrac{1}{s^2 - a^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
16	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\dfrac{1}{(s-a)^2 + w^2}$	$\dfrac{1}{w}e^{at}\operatorname{sen}(wt)$
18	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\dfrac{1}{s(s^2 + w^2)}$	$\dfrac{1}{w^2}(1 - \cos(wt))$
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$	$\dfrac{1}{w^3}(wt - \operatorname{sen}(wt))$
21	$\dfrac{1}{(s^2 + w^2)^2}$	$\dfrac{1}{2w^3}(\operatorname{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
22	$\dfrac{s}{(s^2 + w^2)^2}$	$\dfrac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt)$
23	$\dfrac{s^2}{(s^2 + w^2)^2}$	$\dfrac{1}{2w}(\operatorname{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
24	$\dfrac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)},$ $(a^2 \neq b^2)$	$\dfrac{1}{b^2 - a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\dfrac{1}{(s^4 + 4a^4)}$	$\dfrac{1}{4a^3}[\operatorname{sen}(at)\cosh(at) -$ $- \cos(at)\operatorname{senh}(at)]$
26	$\dfrac{s}{(s^4 + 4a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at))$
27	$\dfrac{1}{(s^4 - a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}(at) - \operatorname{sen}(at))$
28	$\dfrac{s}{(s^4 - a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
30	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\dfrac{a-b}{2}t\right)$
31	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\dfrac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1 + 2at)$
33	$\dfrac{1}{(s^2 - a^2)^k}, \qquad (k > 0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\dfrac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \qquad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \qquad (k > 0)$	$\dfrac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\dfrac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \qquad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\dfrac{s-a}{s-b}\right)$	$\dfrac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\dfrac{s^2 + w^2}{s^2}\right)$	$\dfrac{2}{t}(1 - \cos(wt))$
41	$\ln\left(\dfrac{s^2 - a^2}{s^2}\right)$	$\dfrac{2}{t}(1 - \cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\dfrac{w}{s}\right)$	$\dfrac{1}{t}\operatorname{sen}(wt)$
43	$\dfrac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\operatorname{Si}(t)$
44	$\dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t + 2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\dfrac{1}{as^2}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\dfrac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t + 2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\dfrac{w}{(s^2 + w^2)\left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(wt), & 0 < t < \dfrac{\pi}{w} \\ 0, & \dfrac{\pi}{w} < t < \dfrac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \dfrac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\dfrac{w}{s^2 + w^2}\coth\left(\dfrac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert\operatorname{sen}(wt)\rvert$
48	$\dfrac{1}{as^2} - \dfrac{e^{-as}}{s\,(1 - e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t) = \dfrac{t}{a}, \qquad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

• **Questão 1** (2.5 pontos) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) + 16y(t) = \cos(4t) - 4\,\text{sen}(4t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$$

Solução: —Aplicamos a Transformada de Laplace para obter

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 16Y(s) = \frac{s-16}{s^2+16},$$

Impomos as condições iniciais para obter

$$(s^2+16)Y(s) - s + 4 = \frac{s-16}{s^2+16}.$$

Logo,

$$Y(s) = \frac{s-4}{s^2+16} + \frac{s-16}{(s^2+16)^2}.$$

Calculamos a transformada inversa usando os itens 13, 14, 21 e 22 da tabela:

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos(4t) - \text{sen}(4t) + \frac{t}{8}\,\text{sen}(4t) - \frac{16}{128}\left(\text{sen}(4t) - 4t\cos(4t)\right) \\ &= \cos(4t) - \text{sen}(4t) + \frac{t}{8}\,\text{sen}(4t) - \frac{1}{8}\,\text{sen}(4t) + \frac{t}{2}\cos(4t) \\ &= \cos(4t) - \frac{9}{8}\,\text{sen}(4t) + \frac{t\,\text{sen}(4t)}{8} + \frac{t\cos(4t)}{2} \end{aligned}$$

- **Questão 2** (3.0 pontos) Considere o oscilador harmônico abaixo

$$\begin{cases} y''(t) + \gamma y'(t) + 25y(t) = \delta(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

a) (1.0 ponto) Resolva o problema para $\gamma = 6$.

b) (0.5 ponto) Calcule o valor de γ para que o oscilador fique criticamente amortecido.

c) (1.0 ponto) Resolva o problema para γ do item b).

d) (0.5 ponto) Calcule $y(0)$ e $y'(0)$ para as soluções dos itens a) e c) e verifique que aparentemente as soluções não satisfazem as condições iniciais. Explique o motivo.

Solução:

a) O problema com $\gamma = 6$ fica

$$\begin{cases} y''(t) + 6y'(t) + 25y(t) = \delta(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Resolvemos por transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) &+ 6\left(sY(s) - y(0)\right) + 25Y(s) = 1 \\ &\Downarrow \\ s^2Y(s) &+ 6sY(s) + 25Y(s) = 1 \\ &\Downarrow \\ Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 6s + 25} = \frac{1}{(s+3)^2 + 16} \\ &\Downarrow \\ y(t) &= \frac{e^{-3t}}{4} \operatorname{sen}(4t), \end{aligned}$$

onde usamos o item 17 da tabela.

b) $\Delta = \gamma^2 - 100 = 0$ implica em $\gamma = 10$.

c) O problema com $\gamma = 10$ fica

$$\begin{cases} y''(t) + 10y'(t) + 25y(t) = \delta(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Resolvemos por transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) &+ 10\left(sY(s) - y(0)\right) + 25Y(s) = 1 \\ &\Downarrow \\ s^2Y(s) &+ 10sY(s) + 25Y(s) = 1 \\ &\Downarrow \\ Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 10s + 25} = \frac{1}{(s+5)^2} \\ &\Downarrow \\ y(t) &= te^{-5t}, \end{aligned}$$

onde usamos o item 9 da tabela.

d) Observemos que, em ambos os itens, temos $y(0) = 0$ e $y'(0) \neq 0$. Parece que as soluções não satisfazem as condições iniciais. Mas, na verdade, o termo forçante ser $\delta(t)$ provoca uma descontinuidade na origem. Para representar essas descontinuidades, podemos escrever as duas soluções da forma:

$$y(t) = u(t)\frac{e^{-3t}}{4}\operatorname{sen}(4t)$$

e

$$y(t) = u(t)te^{-5t},$$

respectivamente.

• **Questão 3** (2.5 pontos) Resolva a seguinte equação integro-diferencial:

$$\begin{cases} x'(t) - 6x(t) + 11\displaystyle\int_0^t x(\tau)d\tau - 6\int_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau = 2u(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

[Dica: $(s-1)(s-2)(s-3) = s^3 - 6s^2 + 11s - 6$]

Solução: Aplicamos a transformada de Laplace nas duas equações para obter

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) - 6X(s) + 11\frac{X(s)}{s} - 6\frac{X(s)}{s} &= \frac{2}{s} \\ &\Downarrow \\ \left(s - 6 + \frac{11}{s} - \frac{6}{s^2}\right) X(s) &= \frac{2}{s} \\ &\Downarrow \\ \left(s^3 - 6s^2 + 11s - 6\right) X(s) &= \frac{2s^2}{s}. \end{aligned}$$

Assim, usamos o método de frações parciais para obter:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2s}{(s-1)(s-2)(s-3)} \\ &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3} \\ &= \frac{A(s-2)(s-3) + B(s-1)(s-3) + C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s-3)} \\ &= \frac{(A+B+C)s^2 + (-5A-4B-3C)s + 6A+3B+2C}{(s-1)(s-2)(s-3)} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -5A - 4B - 3C = 2 \\ 6A + 3B + 2C = 0 \end{cases}$$

Somando as três equações, temos $2A = 2$, ou seja, $A = 1$. A primeira equação nos dá $B = -C - 1$ e a segunda nos dá $-5 - 4(-C-1) - 3C = 2$, ou seja, $C = 3$. Finalmente, $B = -4$. Portanto,

$$X(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{4}{s-2} + \frac{3}{s-3},$$

e, pelo item 7 da tabela,

$$x(t) = e^t - 4e^{2t} + 3e^{3t}.$$

• **Questão 4** (2.0 pontos) Considere a função

$$f(t) = tu(t) + (at^2 + t + b)u(t-2) + (t^2 - 2t - 2)u(t-3).$$

Sabendo que $f(t)$ é contínua no ponto $t = 2$ e que $f(t)$ vale 0 para todo t maior ou igual a 3, responda os itens abaixo.

a) (1.0 ponto) Calcule os valores de a e b e esboce o gráfico de $f(t)$.

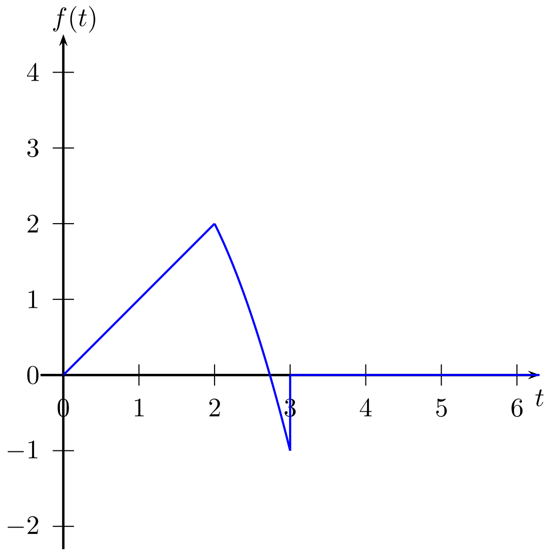
b) (1.0 ponto) Calcule $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{f'(t)\}$.

Solução:

a) Como $f(t)$ é contínua em $t = 2$, temos $2 = 2 + 4a + 2 + b$. Também, como $f(t) = 0$ quando $t > 3$, temos $3 + 9a + 3 + b + 9 - 6 - 2 = 0$. Assim,

$$\begin{cases} 4a + b = -2 \\ 9a + b = -7 \end{cases}$$

Temos $a = -1$ e $b = 2$;



b) Observe que

$$f(t) = tu(t) + (-t^2 + t + 2)u(t-2) + (t^2 - 2t - 2)u(t-3),$$

implica em

$$\begin{aligned} f'(t) &= t\delta(t) + u(t) + (-t^2 + t + 2)\delta(t-2) + (-2t + 1)u(t-2) \\ &+ (t^2 - 2t - 2)\delta(t-3) + (2t-2)u(t-3) \\ &= u(t) + (-2t+1)u(t-2) + \delta(t-3) + (2t-2)u(t-3) \\ &= u(t) - 2(t-2)u(t-2) - 3u(t-2) + 2(t-3)u(t-3) + 4u(t-3) + \delta(t-3) \end{aligned}$$

Assim,

$$G(s) = \frac{s - (2+3s)e^{-2s} + (2 + 4s + s^2)e^{-3s}}{s^2}$$

e, pela Propriedade da transformada da derivada,

$$F(s) = \frac{s - (2+3s)e^{-2s} + (2 + 4s + s^2)e^{-3s}}{s^3}$$